LISÄTEHTÄVÄT

2. Luvut

183. Kokonaisluvun n tekijät löydetään jakamalla n yksi kerrallaan kaikilla kokonaisluvuilla ykkösestä suurimpaan mahdolliseen kokonaislukuun, joka on korkeintaan $\sqrt{n}$. Jos jakolasku menee tasan, ovat sekä jakaja että jakolaskun tulos luvun n tekijöitä. Esim. kun $n = 50$, tulee käydä läpi kaikki luvut yhdestä seitsemään, sillä $\sqrt{50} = 7{,}071\ldots$. Tällöin huomataan, että jakolasku menee tasan vain luvuilla 1, 2 ja 5, jolloin vastaavat jakolaskujen tulokset ovat 50, 25 ja 10. Siis luvun 50 tekijät ovat 1, 2, 5, 10, 25 ja 50. Kyseistä menetelmää kutsutaan kreikkalaisen kehittäjänsä mukaan Eratostheneen seulaksi ja mm. antiikin kreikkalaiset käyttivät sitä etsiessään uusia alkulukuja (kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia ainoastaan itsellään sekä yhdellä). Soveltamalla menetelmää saadaan tehtävän vastaukset:

a) 15: 1, 3, 5, 15 ($\sqrt{15} = 3{,}87\ldots$)
b) 50: 1, 2, 5, 10, 25, 50 ($\sqrt{50} = 7{,}07\ldots$)
c) 49: 1, 7, 49 ($\sqrt{49} = 7$)
d) 19: 1, 19 (alkuluku! $\sqrt{19} = 4{,}35$)
e) 91: 1, 7, 13, 91 ($\sqrt{91} = 9{,}53\ldots$)
f) 221: 1, 13, 117, 221 ($\sqrt{221} = 14{,}86\ldots$)

184. a) $-3+\frac{4}{3} = -\frac{9}{3}+\frac{4}{3} = \frac{-9+4}{3} = \frac{-5}{3} = -1\frac{2}{3}$

b) $-3-\frac{4}{3} = \frac{-9-4}{3} = \frac{-13}{3} = -4\frac{1}{3}$

c) $\left|-\cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\right| = |-4| = 4$

d) $\frac{1}{-3:\frac{4}{3}} = \frac{1}{-\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{1}:\left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{9} = -\frac{4}{9}$

e) $-(-3)-\left(-\frac{4}{3}\right) = 3+\frac{4}{3} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

f) $-\overset{4)}{\frac{1}{3}}+\overset{3)}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{12}+\frac{9}{12} = \frac{-4+9}{12} = \frac{5}{12}$

185. 17 litrasta saadaan $\frac{17}{0{,}7} \approx 24{,}3$ pullollista, joten Timo tarvitsee 25 pulloa.

186. a) $4+\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\frac{1}{3} = 4+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{7}{3} = 4+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 1\cdot 3} = 4+\frac{28}{9} = 4+3\frac{1}{9} = 7\frac{1}{9}$

b) $\frac{5}{7}:\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{2} = \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2} = \frac{\cancel{5}\cdot 3\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}\cdot\cancel{5}\cdot 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

c) $\left(3-\frac{4}{9}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) = \left(\overset{9)}{\frac{3}{1}}-\frac{4}{9}\right):\left(\overset{3)}{\frac{1}{4}}+\overset{4)}{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{27}{9}-\frac{4}{9}\right):\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right)$

$= \frac{23}{9}:\frac{11}{12} = \frac{23}{\cancel{9}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{11} = \frac{23\cdot 4}{3\cdot 11} = \frac{92}{33} = 2\frac{26}{33}$

d) $\left(3:\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\overset{3)}{\frac{1}{4}}+\overset{4)}{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{3}{1}\cdot\frac{9}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}\right) = \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{4}\cdot\frac{11}{\cancel{12}} = \frac{99}{16} = 6\frac{3}{16}$

187. a) $3\frac{3}{7}:\left(1\frac{5}{7}\cdot 2\frac{2}{5}\right) = \frac{24}{7}:\left(\frac{13}{7}\cdot\frac{12}{5}\right) = \frac{24}{7}:\frac{144}{35} = \frac{24}{7}\cdot\frac{35}{\overset{4}{\cancel{144}}} = \frac{\cancel{24}\cdot 35^{5}}{\cancel{7}\cdot\cancel{144}_{6}} = \frac{5}{6}$

b) $\frac{7-(4-2)^2:3-1}{5-4:\frac{1}{2}}+\frac{2}{4} = \frac{7-2^2:3-1}{5-4\cdot 2}+\frac{1}{2} = \frac{7-\frac{4}{3}-1}{-3}+\frac{1}{2} = \frac{\frac{21}{3}-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{-3}+\frac{1}{2}$

$= \frac{\frac{21-4-3}{3}}{-3}+\frac{1}{2} = \frac{\frac{14}{3}}{-3}+\frac{1}{2} = \frac{14}{3}:(-3)+\frac{1}{2} = \frac{14}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2} = -\overset{2)}{\frac{14}{9}}+\overset{9)}{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{28}{18}+\frac{9}{18} = \frac{-19}{18} = -1\frac{1}{18}$

188. $\left(\overset{b)}{\frac{7}{a}}-\overset{a)}{\frac{2}{b}}\right)-\left(\overset{b)}{\frac{5b}{a}}-\overset{ab)}{\frac{2}{1}}\right) = \left(\frac{7b}{ab}-\frac{2a}{ab}\right)-\left(\frac{5b^2}{ab}-\frac{2ab}{ab}\right)$

$= \frac{7b-2a}{ab}-\frac{5b^2-2ab}{ab} = \frac{7b-2a-(5b^2-2ab)}{ab} = \frac{7b-2a-5b^2+2ab}{ab}$

189. Joko näin: Lasketaan, kuinka monta viikkoa 1002 vuorokautta on:

$$\frac{1002}{7} = \frac{700+302}{7} = \frac{700+280+21+1}{7} = \frac{700}{7} + \frac{280}{7} + \frac{21}{7} + \frac{1}{7}$$
$$= 100 + 40 + 3 + \frac{1}{7} = 143 + \frac{1}{7}$$

Tai näin: Jakolaskulla saadaan $\frac{1002}{7} = 143\frac{1}{7}$

Siis 1002:n yön jälkeen on kulunut 143 viikkoa ja yksi päivä (1/7 viikosta), joten tuolloin on perjantai.
Vastaus: Perjantai

190. Väite: $2^{32\,582\,657} + 1$ ei ole alkuluku.
Todistus: Luku $2^{32\,582\,657} + 1$ on jaollinen kolmella, sillä joka kolmas kokonaisluku on jaollinen kolmella ja sitä edeltävät kaksi lukua eivät ole jaollisia kolmella: Tiedetään, että luku $2^{32\,582\,657} - 1$ on alkuluku – erityisesti se ei ole jaollinen kolmella – minkä lisäksi luku $2^{32\,582\,657}$ on jaollinen ainoastaan kahden potensseilla 2, 4, 8, ..., $2^{32\,582\,656}$ ja $2^{32\,582\,657}$, eikä siis myöskään ole jaollinen kolmella. $2^{32\,582\,657} + 1$ ei siis ole alkuluku.

3. Prosenttilaskentaa

191. a) $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\,\%$ **b)** $\frac{15}{12} = 1,25$ siis 25 % suurempi

c) $0,2 \cdot 18 = 3,6$

192. a) 32,5 – 28,5 = 4 prosenttiyksikköä.

b) $\frac{32,5}{28,5} = 1,14035\ldots$ siis nousi noin 14 %.

193. Urheiluseuran kurssiin kuuluu 50 – 36 + 1 = 15 tanssituntia, jolloin yksi tunti maksaa $\frac{95,50}{15} = 6,366... \approx 6,37\ €$. Kuntokeskuksen tanssitunnin hinta on $\frac{84,60}{12} = 7,05\ €$. Siis urheiluseuran tanssitunti on $\frac{6,366...}{7,05} = 0,9030...$ Koska 100 – 90,30…= 9,6926…, niin urheiluseuran tunti on noin 9,7 % halvempi kuin kuntokeskuksen tanssitunti.

Vastaus: Urheiluseuran tunti on 9,7 % halvempi.

194. Autoilija maksoi ennen 100 % – 70 % = 30 % vakuutusmaksuista ja nyt hän maksaa 100 % – (70 % + 10 %) = 20 % vakuutusmaksuista.
Merkitään varsinaista vakuutusmaksua *a*:lla.
Ennen autoilija maksoi $a \xrightarrow{-70\,\%} 0,30a$. Saadaan yhtälö

$$0,30a = 238,77 \quad | : 0,30$$
$$a = 795,9$$

Siis varsinainen vakuutusmaksu oli 795,90 euroa vuodessa. Uudessa tilanteessa bonusta oli 80 % , joten autoilijalle jäi maksettavaksi $795,90 \xrightarrow{-80\,\%} 0,20 \cdot 795,90 = 159,18$ euroa.

Tai näin: Autoilija maksoi ennen 100 % – 70 % = 30 % vakuutusmaksuista ja nyt hän maksaa 100 % – (70 % + 10 %) = 20 % vakuutusmaksuista eli $\frac{2}{3}$-osaa siitä, mitä hän maksoi aiemmin eli $\frac{2}{3} \cdot 238,77 = 159,18\ €$.

Vastaus: Autoilijalle jäi maksettavaa 159,18 €.

195. Merkitään a:llä sähkön hintaa vuoden alussa. Käytetään nuolimerkintää
$a \xrightarrow{+11\,\%} 1{,}11a \xrightarrow{+11\,\%} 1{,}11 \cdot 1{,}11a = 1{,}2321a$.
Muutoskertoimesta 1,2321 päätellään, että hinta nousi kaiken kaikkiaan n. 23 %.
Vastaus: Hinta nousi 23 %.

196. Vuonna 2005 sähkönkulutus oli 84,9 TWh ja se katettiin seuraavasti:
– kotimaisella ydinvoimalla voitiin tuottaa sähköä
$0{,}263 \cdot 84{,}9 = 22{,}3287$ (TWh)
– muilla kotimaisilla energialähteillä voitiin tuottaa sähköä
$0{,}537 \cdot 84{,}9 = 45{,}5913$ (TWh)
– tuontisähköllä jouduttiin kattamaan loput eli
100−26,3−53,7 = 20 prosenttia siis $0{,}2 \cdot 84{,}9 = 16{,}98$ (TWh).

Vuonna 2009 sähkönkulutus on 12 % suurempi kuin vuonna 2005 eli
$1{,}12 \cdot 84{,}9 = 95{,}088$ (TWh) ja se katetaan seuraavasti:
– kotimaisella ydinvoimalla voitiin tuottaa sähköä
22,3287 + 14 = 36,3287 (TWh)
– muilla kotimaisilla energialähteillä voitiin tuottaa sähköä edelleen saman verran kuin vuonna 2005 eli 45,5913 (TWh)
– tuontisähköllä jouduttiin kattamaan loput eli
95,088 − 36,3287 − 45,5913 = 13,168 (TWh)

Siispä vuonna 2009
Kotimaisen ydinvoiman osuus sähkön kokonaistuotannosta on
$\frac{36{,}3287}{95{,}088} = 0{,}38205\ldots \approx 38{,}2\,\%$.
Ja Tuontisähkön osuus sähkön kokonaistuotannosta on
$\frac{13{,}168}{95{,}088} = 0{,}13848\ldots \approx 13{,}8\,\%$
Vastaus: Ydinsähkön osuus on 38,2 % ja tuontisähkön osuus on 13,8 %.

197. Koska $\frac{95}{100} = 0{,}95$ niin auton todellinen nopeus on 5 % pienempi kuin mittarin ilmoittama lukema, joten kun mittari näyttää lukemaa 85 km/h, on todellinen nopeus $0{,}95 \cdot 85 = 80{,}75 \approx 81$ km/h.
Vastaus: Kun nopeusmittari näyttää 85 km/h niin auton todellinen nopeus on noin 81 km/h.

4. Potenssi

198. a) $(-2)^8 \cdot (-2)^{-6} = (-2)^{8-6} = (-2)^2 = 4$

b) $0{,}5^5 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}5^{5+2} = 0{,}5^7 = 0{,}0078125$

c) $k^3 \cdot k \cdot k^3 = k^{3+1+3} = k^7$

d) $\left(1\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27} = 4\frac{17}{27}$

e) $b^{n-1} \cdot b^{n+2} = b^{(n-1)+(n+2)} = b^{n-1+n+2} = b^{2n+1}$

f) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

199. a) $2^2 + 2^0 - 2^1 = 4 + 1 - 2 = 3$

b) $-3^0 + 3^{-2} = -1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -1 + \frac{1}{9} = -\frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{-9+1}{9} = -\frac{8}{9}$

c) $(2 - 2^2)^2 = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$

d) $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$ tai $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$

200. a) $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ b) $-(4^2) = -16$

c) $(-4)^2 = 16$ d) $-((-4)^3) = -(-64) = 64$

201. a) $10 = 1 \cdot 10^1 = 10^1$ b) $1000 = 1 \cdot 10^3 = 10^3$

c) $10\,000 = 1 \cdot 10^4 = 10^4$ d) $1 = 10^0$

e) Nollaa ei voida esittää kymmenpotenssimuodossa

f) $23\,000\,000 = 2{,}3 \cdot 10\,000\,000 = 2{,}3 \cdot 10^7$

g) $0{,}000000012 = \frac{1{,}2}{100\,000\,000} = \frac{1{,}2}{10^8} = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$

202. a) $5{,}4 \cdot 10^4 = 5{,}4 \cdot 10\,000 = 54\,000$

b) $53{,}4 \cdot 10^5 = 53{,}4 \cdot 100\,000 = 5\,340\,000$

c) $1{,}4 \cdot 10^{-4} = 1{,}4 \cdot 0{,}0001 = 0{,}000\,14$

d) $22 \cdot 10^9 = 22 \cdot 1\,000\,000\,000 = 22\,000\,000\,000$

e) $745 \cdot 10^{-9} = 7{,}45 \cdot 10^{-7} = 7{,}45 \cdot 0{,}000\,000\,1 = 0{,}000\,000\,745$

f) $0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 0{,}000\,01 = 0{,}000\,05$

203. 5 biljoonaa = $5\,000\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^{12}$;
4 miljardia = $4\,000\,000\,000 = 4 \cdot 10^9$.

$\frac{5 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^9} = \frac{5}{4} \cdot 10^{12} \cdot 10^{-9} = 1{,}25 \cdot 10^3 = 1\,250.$

Siis punasoluja on 1 250 kertaa niin paljon kuin valkosoluja.

204. a) $\frac{(x^2)^4 x}{x x^2 x^4} = \frac{x^{2 \cdot 4}}{x^{2+4}} = \frac{x^8}{x^6} = x^8 \cdot x^{-6} = x^{8-6} = x^2$

b) $\frac{(2a^2b^4)^3}{ab^3} = \frac{2^3(a^2)^3(b^4)^3}{ab^3} = \frac{8a^{2 \cdot 3}b^{4 \cdot 3}}{ab^3} = 8a^6b^{12}a^{-1}b^{-3} = 8a^{6-1}b^{12-3} = 8a^5b^9$

c) $\frac{10s^7(st)^4}{s^3t^2} - (2s^4t)^2 = 10s^7s^4t^4s^{-3}t^{-2} - 2^2(s^4)^2t^2 = 10s^{7+4-3}t^{4-2} - 4s^{4 \cdot 2}t^2$
$= 10s^8t^2 - 4s^8t^2 = (10-4)s^8t^2 = 6s^8t^2$

205. a) $10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$

b) $(2{,}3 \cdot 10^5)^2 = 2{,}3^2 \cdot (10^5)^2 = 5{,}29 \cdot 10^{5 \cdot 2} = 5{,}29 \cdot 10^{10}$

c) $(2{,}3 \cdot 10^5)^{-2} = 2{,}3^{-2} \cdot (10^5)^{-2} = \frac{1}{2{,}3^2} \cdot 10^{5 \cdot (-2)} = \frac{1}{5{,}29} \cdot 10^{-10} = \frac{100}{529} \cdot 10^{-10}$

d) $(5{,}41 \cdot 10^{20}) \cdot (3 \cdot 10^{-8}) = 5{,}41 \cdot 3 \cdot 10^{20} \cdot 10^{-8} = 16{,}23 \cdot 10^{20-8} = 16{,}23 \cdot 10^{12}$

e) $\frac{7{,}5 \cdot 10^{16} \cdot 6 \cdot 10^{-8}}{2{,}5 \cdot 10^6} = \frac{7{,}5}{2{,}5} \cdot 6 \cdot 10^{16} \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 6 \cdot 10^{16-8-6} = 18 \cdot 10^2 = 18 \cdot 100$

206. a) $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

b) $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ jos } a \geq 0 \\ -a, \text{ jos } a < 0 \end{cases} = |a|$ (neliöjuuren tulee aina olla ei-negatiivinen!)

c) $\left(\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{b \cdot b} = \sqrt{b^2} = |b| \underset{(b \geq 0)}{=} b$

d) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 \cdot 2 = 18$

207. a) $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ b) $\sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$ c) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

208. a) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

209. a) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3}}{\sqrt[3]{4\cdot 4\cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$

b) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 8+3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\cdot 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2s$

d) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3 = \sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7\cdot 7\cdot 7} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

5. Lauseke

210. a) $4x^2\cdot 2x^2 = 4\cdot 2\cdot x^4\cdot x^2 = 8\cdot x^{4+2} = 8x^6$

b) $-3s(s^2 - s + 2) = -3s\cdot s^2 + (-3s)\cdot(-s) + (-3s)\cdot 2 = -3s^3 + 3s^2 - 6s$

c) $(3x^2 - 2)(2x + 5) = 3x^2\cdot 2x + 3x^2\cdot 5 + (-2)\cdot 2x + (-2)\cdot 5$
$= 6x^3 + 15x^2 - 4x - 10$

211. a) $(3b - 1)^2 = (3b - 1)(3b - 1) = (3b)^2 - 3b - 3b + (-1)^2 = 9b^2 - 6b + 1$

b) $\frac{16xy^4z^3}{-2yz^3} = \frac{16}{-2}xy^{4-1} = -8xy^3$ **c)** $\frac{10y^3 - 2}{2} = \frac{10y^3}{2} - \frac{2}{2} = 5y^3 - 1$

212. a) $3y(y - 3)(2y^2 - y + 2) = (3y^2 - 9y)(2y^2 - y + 2)$
$= 3y^2(2y^2 - y + 2) - 9y(2y^2 - y + 2)$
$= 6y^4 - 3y^3 + 6y^2 - 18y^3 + 9y^2 - 18y = 6y^4 - 21y^3 + 15y^2 - 18y$

b) $\left(\frac{c}{3} + 3\right)\left(\frac{c}{3} - 3\right) = \left(\frac{c}{3}\right)^2 + \frac{c}{3}\cdot(-3) + \frac{c}{3}\cdot 3 + 3\cdot(-3) = \frac{c^2}{3^2} - c + c - 9 = \frac{c^2}{9} - 9$

c) $\frac{2 - 4x^2}{2x} = \frac{2}{2x} - \frac{4x^2}{2x} = \frac{1}{x} - \frac{4}{2}x^{2-1} = \frac{1}{x} - 2x$

213. a) $(x - 3)^2 - (2x - 2)x - 2(3 - x) = (x - 3)(x - 3) - (2x^2 - 2x) - (6 - 2x)$
$= x^2 - 3x - 3x + (-3)^2 - 2x^2 + 2x - 6 + 2x = -x^2 - 2x + 3$

b) $(x + 2)(x - 2) - (x - 1)(x + 2) = (x + 2)((x - 2) - (x - 1))$
$= (x + 2)(x - 2 - x + 1) = (x + 2)(-1)$
$= -x - 2$

214. a) $(3x^2 + 3x - 6) - (4x + 2) - (2x^2 - 4x + 2)$
$= 3x^2 + 3x - 6 - 4x - 2 - 2x^2 + 4x - 2$
$= x^2 + 3x - 10$

b) $5x^2 - \frac{3}{2}x + 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{6}x^2 - \frac{5}{3}x + 4\right) + x - 2$
$= 5x^2 - \frac{3}{2}x + 3 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}x - \frac{3}{2}\cdot 4 + x - 2$
$5x^2 - \frac{3}{2}x + 3 - x^2 + \frac{5}{2}x - 6 + x - 2 = 4x^2 + 2x - 5$

215. a) $\dfrac{x^2}{3x}+\dfrac{2(1-x)}{6}=\dfrac{x\cdot x}{3x}+\dfrac{2(1-x)}{2\cdot 3}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{x+1-x}{3}=\dfrac{1}{3}\ (x\neq 0)$

b) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}=\dfrac{x^2+2x-2x+2\cdot(-2)}{x^2-4}=\dfrac{x^2-4}{x^2-4}=1\ (x\neq -2 \text{ ja } x\neq 2)$

c) $\dfrac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}=x^{3+n}x^{4+n}x^{-7}=x^{(3+n)+(4+n)-7}=x^{3+n+4+n-7}=x^{2n}$

216. Sievennetään ensin:

$$P(x)=5x^2-\frac{3}{2}x+3-2x\left(\frac{4}{6}x^2-\frac{5}{3}x+4\right)$$
$$=5x^2-\frac{3}{2}x+3-\frac{4}{3}x^3+\frac{10}{3}x^2-8x=-\frac{4}{3}x^3+\frac{25}{3}x^2-\frac{19}{2}x+3$$

a) Korkeimman asteen termi = $-\dfrac{4}{3}x^3$, joten asteluku = 3.

b) Toisen asteen termi = $\dfrac{25}{3}x^2$, kerroin = $\dfrac{25}{3}=8\dfrac{1}{3}$.

c) $P(-2)=-\dfrac{4}{3}\cdot(-2)^3+\dfrac{25}{3}\cdot(-2)^2-\dfrac{19}{2}\cdot(-2)+3$

$$=-\frac{4}{3}\cdot(-8)+\frac{25}{3}\cdot 4+19+3=\frac{132}{3}+22=44+22=66$$

d) $P(a)=-\dfrac{4}{3}a^3+\dfrac{25}{3}a^2-\dfrac{19}{2}a+3;$

$$P(a^2)=-\frac{4}{3}(a^2)^3+\frac{25}{3}(a^2)^2-\frac{19}{2}a^2+3=-\frac{4}{3}a^6+\frac{25}{3}a^4-\frac{19}{2}a^2+3$$

217. a) $P(1)=-\dfrac{3}{2}\cdot 1+1=\dfrac{-3+2}{2}=-\dfrac{1}{2};$

$$Q\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-4=-\frac{5\cdot 2}{3\cdot 3}-4=-\frac{10}{9}-4=\frac{-10-36}{9}=-\frac{46}{9}$$

b) Summa: $P(x)+Q(x)=-\dfrac{3}{2}x+1+\left(\dfrac{5}{3}x-4\right)=\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{3}\right)x+1-4$

$$=\frac{-9+10}{6}x-3=\frac{1}{6}x-3$$

Tulo: $P(x)\cdot Q(x)=\left(-\dfrac{3}{2}x+1\right)\left(\dfrac{5}{3}x-4\right)=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{3}x^2-\dfrac{3}{2}x\cdot(-4)+\dfrac{5}{3}x-4$

$$=-\frac{5}{2}x^2+6x+\frac{5}{3}x-4=-\frac{5}{2}x^2+\frac{23}{3}x-4$$

c) Polynomin $P(x)$ kuvaaja $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ on suora, jonka kulmakerroin on $-\dfrac{3}{2}$ ja joka leikkaa y-akselin pisteessä (0, 1). Polynomin $Q(x)$ kuvaaja $y=\dfrac{5}{3}x-4$ on suora, jonka kulmakerroin on $\dfrac{5}{3}$ ja joka leikkaa y-akselin pisteessä (0, –4).

d) Kuvaajista voidaan arvioida, että suora $y = P(x)$ leikkaa x-akselin lähellä pistettä (0,7; 0) ja suora $y = Q(x)$ lähellä pistettä (2,4; 0).

e) $P(x)=Q(x)$

$$-\frac{3}{2}x+1=\frac{5}{3}x-4$$
$$-\frac{3}{2}x-\frac{5}{3}x=-4-1$$
$$\frac{-9-10}{6}x=-5$$
$$-\frac{19}{6}x=-5 \quad \Big| :\left(-\frac{19}{6}\right)$$
$$x=\frac{5}{1}:\frac{19}{6}=\frac{5\cdot 6}{1\cdot 19}=\frac{30}{19}$$

218. x on kolmasosa b:stä eli: $x=\dfrac{1}{3}b$. Tällöin

$$\frac{a^2x}{ab}=\frac{3^2x}{3b}=\frac{3\cdot 3x}{3b}=\frac{3\cdot\frac{1}{3}b}{b}=\frac{b}{b}=1.\ (b\neq 0)$$

6. Ensimmäisen asteen yhtälö

219. a)
$$\begin{aligned} 4x-2&=5x+2\\ 4x-5x&=2+2\\ -x&=4\\ x&=-4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x-2&=7x+2\\ 4x-7x&=2+2\\ -3x&=4 \quad |:(-3)\\ x&=-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4(x-2)-5&=5(x+2)-4x+2\\ 4x-8-5&=5x+10-4x+2\\ 4x-13&=x+12\\ 4x-x&=12+13\\ 3x&=25 \quad |:3\\ x&=\frac{25}{3} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 4(x-2)-(2-x)&=5(x+2)-1\\ 4x-8-2+x&=5x+10-1\\ 5x-10&=5x+9\\ 5x-5x&=9+10\\ 0&=19 \quad |\text{aina epätosi!} \end{aligned}$$

Vastaus: Yhtälöllä ei ole ratkaisua

220. a)
$$\begin{aligned} (x-2)-2(x+1)&=-2x+1\\ x-2-2x-2&=-2x+1\\ -x-4&=-2x+1\\ -x+2x&=1+4\\ x&=5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} {}^{5)}\frac{x+3}{9}&={}^{9)}\frac{-2x+3}{5}\\ \frac{5(x+3)}{45}&=\frac{9(-2x+3)}{45}\\ \frac{5x+15}{45}&=\frac{-18x+27}{45} \quad |\cdot 45\\ 5x+15&=-18x+27\\ 5x+18x&=27-15\\ 23x&=12\\ x&=\frac{12}{23} \end{aligned}$$

Tai ristiinkertomalla!

c)
$$\begin{aligned} {}^{2)}\frac{3x}{4}-{}^{4)}\frac{x-1}{2}&=\frac{2x-4}{11}\\ \frac{6x}{8}-\frac{4x-4}{8}&=\frac{2x-4}{11}\\ \frac{6x-(4x-4)}{8}&=\frac{2x-4}{11}\\ {}^{11)}\frac{2x+4}{8}&={}^{8)}\frac{2x-4}{11}\\ \frac{11(2x+4)}{88}&=\frac{8(2x-4)}{88}\\ \frac{22x+44}{88}&=\frac{16x-32}{88} \quad |\cdot 88\\ 22x+44&=16x-32\\ 22x-16x&=-32-44\\ 6x&=-76 \quad |:6\\ x&=-\frac{76}{6}=-\frac{38}{3} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}x+1=\frac{1}{5}(2x+2)\\ &\frac{1}{4}x+1=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}\\ {}^{5)}&\frac{1}{4}x-{}^{4)}\frac{2}{5}x=\frac{2}{5}-1\\ &\frac{5}{20}x-\frac{8}{20}x=\frac{2}{5}-\frac{5}{5}\\ &-\frac{3}{20}x=-\frac{3}{5} \quad \left|:\left(-\frac{3}{20}\right)\right.\\ &x=\frac{3}{5}:\frac{3}{20}=\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{3}=\frac{3\cdot 20^{4}}{5\cdot 3}=4 \end{aligned}$$

221. a) $x + 33 = 4$

$x = 4 - 33$

$x = -29$

b) $x + 3x = x$

$4x - x = 0$

$3x = 0 \quad | : 3$

$x = \frac{0}{3} = 0$

c) Merkitään a:lla naulojen hintaa, b:llä kirveen hintaa ja c:llä lapion hintaa. Naulat maksavat kuudesosan kirveen ja lapion yhteishinnasta eli kirves ja lapio maksavat kuusi kertaa niin paljon kuin naulat.
Siis $a + b + c = 77$ ja $b + c = 6a$, mistä saadaan $a + 6a = 77$

$7a = 77 \quad | : 7$

$a = \frac{77}{7} = 11\ €$

222. Yhtälön tulee siis olla voimassa, kun $x = -1$. Täytyy siis ratkaista a yhtälöstä:

$5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1 - a)$

$5 + 2 + 2 = -2(-1 - a)$

$9 = 2 + 2a$

$2a = 9 - 2$

$a = \frac{7}{2}$

223. Merkitään kysyttyä lukua x:llä. 12 % = 0,12, joten: $0{,}12x = 6 \quad | : 0{,}12$

$x = \frac{6}{0{,}12} = 50$

224. Merkitään paidan alkuperäistä hintaa a:llä. Korotuksen jälkeen paidan hinta oli xa. $a \xrightarrow{+p\ \%} xa \xrightarrow{-40\ \%} 0{,}60xa$ Koska nyt paidan hinta piti olla sama kuin alussa, niin saadaan yhtälö:

$0{,}60xa = a \quad | : a$

$0{,}60x = 1 \quad | : 0{,}60$

$x = \frac{1}{0{,}60} = 1{,}666\ldots$

Kun korotus on p % niin muutoskerroin on 1,666…
Tästä päätellään, että p = 66,66…% ≈ 67 %

225. Merkitään kolmion pienintä kulmaa α:lla. Tällöin kaksi muuta kulmaa ovat 2α ja 3α. Tiedetään, että kolmion kulmien summa on 180°, joten

$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$

$6\alpha = 180° \quad | : 6$

$\alpha = \frac{180°}{6} = 30°$

Suurin kulma on siis $3\alpha = 3 \cdot 30° = 90°$.

226. Merkitään 5 % liuosta tarvittava määrä x (litraa).
Taulukoidaan tiedot.

	Määrä (litraa)	Ainetta	Vettä
5 % liuos	x	0,05x	(loput)
Vettä	y	–	(kaikki)
2 % liuos	750 g	0,02 · 750 g = 15 g	(loput)

Aineen määrästä saadaan yhtälö

$0{,}05x = 15 \quad | : 0{,}05$

$x = \frac{15}{0{,}05} = 300$

5 % liuosta tarvitaan siis 300g
Tällöin vettä tarvitaan 750 − 300 = 450 grammaa.

Vastaus: 5 % liuosta tarvitaan 300 grammaa ja vettä 450 grammaa.

227. Merkitään hiusten leikkauksen verotonta hintaa x:llä. Tiedetään, että

$1{,}22x = 25 \quad | : 1{,}22$

$x = \frac{25}{1{,}22} = 20{,}491\ldots\ €$

Arvonlisävero pieneni 14 prosenttiyksikköä, joten vero on nyt
22 % − 14 % = 8 %, ja hiusten leikkaus maksaa
1,08x = 1,08 · 20,491… ≈ 22,13 €.

228. Maustetun teen kilohinta on $\frac{3{,}30\ €}{0{,}15\ \text{kg}} = 22\ €/\text{kg}$. Siispä sekoituksen kilohinnan tulee olla $\frac{22}{2} = 11\ €/\text{kg}$. Merkitään x:llä sekoitukseen tarvittavan mustan teen määrää kilogrammoissa. Tällöin sekoituksen kokonaismäärä on $x + 0{,}15$.

Sekoituksen hinta on $5{,}5x + 3{,}30$.
Toisaalta sekoituksen hinta on $11(x + 0{,}15)$. Näistä saadaan yhtälö
$5{,}5x + 3{,}30 = 11(x + 0{,}15)$
$5{,}5x + 3{,}30 = 11x + 1{,}65$
$-5{,}5x = -1{,}65 \quad | : (-5{,}5)$
$x = 0{,}3$.

Vastaus: Mustaa teetä pitää lisätä 300 grammaa.

229. Hedelmän massa on alussa a ja lopussa b.

	alussa	lopussa
vettä	$0{,}85a$	$0{,}05b$
muita aineita	$0{,}15a$	$0{,}95b$

Muiden aineiden määrän voidaan olettaa pysyvän samana haihdutuksessa, joten
$0{,}95b = 0{,}15b \quad | : 0{,}95$
$b = 0{,}157\ldots a$
Vettä on siis poistettava $0{,}85a - 0{,}05 \cdot 0{,}157\ldots a = 0{,}842\ldots a$
Prosentteina $\frac{0{,}842\ldots a}{0{,}85a} \cdot 100\ \% = 99{,}071\ldots\ \% \approx 99\ \%$
Vastaus: Vedestä on haihdutettava 99 %.

7. Verrannollisuus

230. a) $\frac{5x+1}{7} = \frac{2x+1}{3}$

$3(5x+1) = 7(2x+1)$
$15x + 3 = 14x + 7$
$15x - 14x = 7 - 3$
$x = 4$

b) $\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$

$x^2 = 3 \cdot 12$
$x^2 = 36 \quad |\pm\sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

231. Merkitään tarvittavien pumppujen lukumäärää x:llä. Tyhjenemisaika on kääntäen verrannollinen pumppujen lukumäärään nähden, joten

$\frac{3}{x} = \frac{1{,}5}{3{,}5}$
$3 \cdot 3{,}5 = 1{,}5x$
$1{,}5x = 10{,}5$
$x = \frac{10{,}5}{1{,}5} = 7.$

Siis tarvitaan $7 - 3 = 4$ pumppua lisää.

232. Merkitään x:llä kysyttyä bensiinimäärää. Bensiinin kulutus on suoraan verrannollinen ajomatkaan nähden, joten $\frac{150}{200} = \frac{14}{x}$

$150x = 14 \cdot 200$
$x = \frac{2\,800}{150} \approx 18{,}7$ litraa.

233. Merkitään kysyttyä työn kestoa t:llä. Työn kesto on kääntäen verrannollinen työntekijöiden määrään nähden, joten $\frac{4}{4+2} = \frac{t}{30}$

$4 \cdot 30 = 6t$
$6t = 120$
$t = \frac{120}{6} = 20$ työpäivää.

234. a) Merkitään kustannuksia x:lla. Saadaan verranto:

$$\frac{x}{300} = \frac{10^3}{25^3} \quad | \cdot 300$$
$$x = \frac{10^3}{25^3} \cdot 300 \approx 19{,}2 \text{ €/h}$$

b) Merkitään kysyttyä nopeutta v:llä. Saadaan verranto:

$$\frac{300}{500} = \frac{25^3}{v^3}$$
$$300v^3 = 25^3 \cdot 500$$
$$v^3 = \frac{25^3 \cdot 500}{300} \quad | \sqrt[3]{\ }$$
$$v = \sqrt[3]{\frac{25^3 \cdot 5}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot 25 \approx 30 \text{ solmua}$$

c) Merkitään a:lla kulutusta nopeudella v. Siis $\frac{300}{a} = \frac{25^3}{v^3}$

$$300v^3 = 25^3 a$$
$$a = \frac{300v^3}{25^3} = 0{,}0192v^3.$$

Eli kun matkataan x tuntia, ovat polttoainekustannukset $ax = 0{,}0192v^3x$.

235. x_1 = jarrutusmatka nopeudella 60 km/h, x_2 = jarrutusmatka nopeudella 80 km/h. Saadaan verranto: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{80^2}{60^2}$

$$x_2 = \frac{80^2}{60^2} x_1 \approx 1{,}78x_1$$

Siis jarrutusmatka nopeudella 60 km/h on n. 78 % pitempi kuin nopeudella 80 km/h.

236. v = mopoilijan nopeus tiistaina → maanantain nopeus = $v + 10$.
Matkan kesto on kääntäen verrannollinen nopeuteen, joten

$$\frac{v}{v+10} = \frac{20-5}{20}$$
$$20v = 15(v+10)$$
$$20v = 15v + 150$$
$$20v - 15v = 150$$
$$5v = 150$$
$$v = \frac{150}{5} = 30 \text{ km/h}.$$

237. Taulukoidaan tehtävän tiedot:

	lämpötilaero (°C)	kustannukset
alussa	22,0 – (–2,0) = 24	a
lopussa	21,0 – (–2,0) = 23	b

Suoraan verrannolliset suureet

Saadaan verranto: $\frac{a}{b} = \frac{24}{23}$

$$24b = 23a \quad | : 24$$
$$b = \frac{23}{24}a$$

Lämmityskustannukset pienenevät siis $a - \frac{23}{24}a = \frac{1}{24}a$

Prosentteina $\frac{\frac{1}{24}\cancel{a}}{\cancel{a}} \cdot 100\,\% = 4{,}16\ldots\,\% \approx 4{,}2\,\%$.

Vastaus: Siis lämmityskustannukset pienenevät 4,2 %.

238. Tuotteen hinta alussa a ja myynti b.
Myynnin muutoskerroin x
Taulukoidaan tehtävän tiedot

	hinta	myynti
alussa	a	b
lopussa	$1{,}2a$	xb

Suureet ovat kääntäen verrannolliset, joten
$1{,}2\cancel{a} \cdot x\cancel{b} = \cancel{a}\cancel{b}$
$1{,}2x = 1 \quad | : 1{,}2$
$x = 0{,}833\ldots$
Siis myynti korotuksen jälkeen on 83,3... % myynnistä ennen korotusta, joten myynti pienenee 100 % − 83,3... % ≈ 16,7 %.

8. Toisen asteen polynomifunktio ja yhtälö

239. a) $2x^2 = 32 \quad | : 2$
$x^2 = 16 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

b) $0{,}1x^2 = 2{,}5 \quad | \cdot 10$
$x^2 = 25 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

c) $\frac{1}{x} = \frac{x}{4}$
$1 \cdot 4 = x^2$
$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{4} = \pm\sqrt{2}$

240. a) $(x-5)(x+3) = 0$
$x - 5 = 0$ tai $x + 3 = 0$
$x = 5$ tai $x = -3$

b) $3x = 6x^2$
$6x^2 - 3x = 0$
$6x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
$6x = 0$ tai $x - \frac{1}{2} = 0$
$x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

c) $2x^2 + 1 = 1$
$2x^2 = 0 \quad | : 2$
$x^2 = 0$
$x = 0$

241. a) $2x + x^2 + 1 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$

b) $1\,000x^2 - 2\,000x + 1\,000 = 0 \quad | : 1\,000$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$x = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

c) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{9} = x^2 - \frac{1}{3}x \quad | \cdot 9$
$9 \cdot \frac{2}{3}x + 9 \cdot \frac{4}{9} = 9 \cdot x^2 - 9 \cdot \frac{1}{3}x$
$6x + 4 = 9x^2 - 3x$
$9x^2 - 3x - 6x - 4 = 0$
$9x^2 - 9x - 4 = 0$
$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4)}}{2 \cdot 9}$
$x = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{18} = \frac{9 \pm 15}{18}$
$x = \frac{-6}{18}$ tai $x = \frac{24}{18}$
$x = -\frac{1}{3}$ tai $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

242. a) $2(x^2+3)-x(2x+1)=3(x^2-2x+2)$

$$2x^2+6-2x^2+x=3x^2-6x+6$$
$$-3x^2+x+6x+6-6=0$$
$$-3x^2+7x=0$$
$$-3x\left(x-\frac{7}{3}\right)=0$$
$$-3x=0 \text{ tai } x-\frac{7}{3}=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$$

b) $(3+2x)(3-2x)=3(12x+3)$

$$9-6x+6x-4x^2=36x+9$$
$$-4x^2-36x+9-9=0$$
$$-4x^2-36x=0$$
$$-4x(x+9)=0$$
$$-4x=0 \text{ tai } x+9=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=-9$$

243. $\frac{2x}{2x+3}=\frac{2x+1}{8}$

$$2x\cdot 8=(2x+3)(2x+1)$$
$$16x=4x^2+2x+6x+3$$
$$4x^2+8x-16x+3=0$$
$$4x^2-8x+3=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm 4}{8}$$
$$x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \text{ tai } x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

244. $x(x+1)=156$

$$x^2+x-156=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-156)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 25}{2}$$
$$x=\frac{-26}{2}=-13 \text{ tai } x=\frac{24}{2}=12$$

245.

$$(3x-1)(2x+1)=(6x+3)(3x-1)$$
$$6x^2+3x-2x-1=18x^2-6x+9x-3$$
$$6x^2+3x-2x-1-18x^2+6x-9x+3=0$$
$$-12x^2-2x+2=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-12)\cdot 2}}{2\cdot(-12)}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{100}}{-24}=\frac{2\pm 10}{-24}$$
$$x=\frac{2+10}{-24}=-\frac{1}{2} \text{ tai } x=\frac{2-10}{-24}=\frac{-8}{-24}=\frac{1}{3}$$

246. Yhtälön täytyy olla voimassa, kun $x=-3$ eli tulee olla

$$-3\cdot(-3+p)=3\cdot(-3)$$
$$9-3p=-9$$
$$-3p=-9-9$$
$$-3p=-18$$
$$p=\frac{-18}{-3}=6$$

Tällöin alkuperäinen yhtälö saa muodon

$$x(x+6)=3x$$
$$x^2+6x-3x=0$$
$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x+3=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=-3$$

Siis juuret ovat $x=-3$ ja $x=0$.

247. a) $15x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 15\cdot(-1)}}{2\cdot 15}=\frac{-2\pm 8}{30}$$
$$x=\frac{-10}{30}=-\frac{1}{3} \text{ tai } x=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$$

b) $\frac{4x}{x-1}=13$

$$4x=13(x-1)$$
$$4x=13x-13$$
$$4x-13x=-13$$
$$-9x=-13$$
$$x=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}$$

248. a) $3x+4=5-6x$

$3x+6x=5-4$

$9x=1$

$x=\frac{1}{9}$

b) $12x^2-7x+1=0$

$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot12\cdot1}}{2\cdot12}=\frac{7\pm1}{24}$

$x=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ tai $x=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

249. $\left(x+7-\sqrt{3}\right)\left(x+7+\sqrt{3}\right)=0$

$x^2+7x+\sqrt{3}x+7x+7^2+7\sqrt{3}-\sqrt{3}x-7\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=0$

$x^2+14x+49-3=0$

$x^2+14x+46=0$

$x=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot1\cdot46}}{2\cdot1}=\frac{-14\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-14}{2}\pm\frac{\sqrt{4\cdot3}}{2}=-7\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}=-7\pm\sqrt{3}$

PIKAOSIO

1. $5 \cdot 4 - 6 \cdot 3(5 - 4 : 2) = 20 - 18(5 - 2) = 20 - 18 \cdot 3 = 20 - 54 = -34$

2. $\frac{5}{4} - \frac{4}{3} + \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{15 - 16 + 10}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

3. 15 % = 0,15 → $0{,}15 \cdot 4 = 0{,}6 = 0{,}15 \cdot 4 = 0{,}6 = \frac{3}{5}$

4. 25 % = 0,25 → $0{,}25 \cdot 21 = 5{,}25$ €

5. Merkitään Tuomaksen palkkaa x:llä. Tällöin $0{,}32x = 460{,}80 \quad | : 0{,}32$

$$x = \frac{460{,}80}{0{,}32} = 1440 \text{ €}.$$

6. $\frac{d \cdot d^4}{d^8} = d^1 \cdot d^4 \cdot d^{-8} = d^{1+4-8} = d^{-3} = \frac{1}{d^3}$

7. $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 4 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$$

8.
$5x - 2 = 4 - (x + 1)$
$5x - 2 = 4 - x - 1$
$5x + x = 3 + 2$
$6x = 5 \quad | : 6$
$x = \frac{5}{6}$

9.
$\frac{5x - 2}{3} = \frac{1 - x}{4} \quad |$ kerrotaan ristiin
$4(5x - 2) = 3(1 - x)$
$20x - 8 = 3 - 3x$
$20x + 3x = 3 + 8$
$23x = 11 \quad | : 23$
$x = \frac{11}{23}$

10.
$4x^2 = 16 \quad | : 4$
$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$
$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

11.
$(x + 2)(2 - 5x) = 0$
$x + 2 = 0$ tai $2 - 5x = 0$
$x = -2$ tai $-5x = -2$
$x = -2$ tai $x = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

12. Jotta olisi $\sqrt{2x - 1} = 7$, tulee olla $2x - 1 = 49 \quad$ (koska $\sqrt{49} = 7$)
$2x = 49 + 1$
$2x = 50 \quad | : 2$
$x = 25$

13. 29 on alkuluku, joten se on jaollinen vain itsellään ja yhdellä. Tämän voi tarkistaa jakamalla luvun 29 vuorotellen luvuilla yhdestä viiteen ($\sqrt{29} = 5{,}385...$) ja toteamalla, että jako menee tasan vain ykkösellä (kts. lisätehtävän 183 ratkaisu).

14. Merkitään Rikun tarvitsemaa arvosanaa x:llä. Rikun keskiarvon tulee olla vähintään kahdeksan eli rajatapauksena Rikun keskiarvo on tasan kahdeksan: $\frac{7 + 8 + 9 + x}{4} = 8 \quad | \cdot 4$

$7 + 8 + 9 + x = 8 \cdot 4$
$24 + x = 32$
$x = 32 - 24 = 8$

15.
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

16. $a(x + 1) = a^2 \quad | : a \quad$ (yhtälö voidaan jakaa a:lla, koska $a \neq 0$)
$\frac{a(x + 1)}{a} = \frac{a \cdot a}{a}$
$x + 1 = a$
$x = a - 1$

17. Tomaattien kilohinta on $\frac{4{,}52 \text{ €}}{1{,}5 \text{ kg}} = 3{,}013... \text{ €/kg}$, joten 2,7 kg maksaa
$3{,}013... \text{ €/kg} \cdot 2{,}7 \text{ kg} \approx 8{,}14$ €.

HARJOITUSKOE 1

1. a) $4(x+1)-(2x-4)=4x+4-2x+4=2x+8$

b) $\frac{5}{7}-4\frac{2}{3}+\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{2}{3}=\frac{5}{7}-\frac{14}{3}+\frac{3}{2}:\frac{2}{3}=\frac{15-98}{21}+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{-83}{21}+\frac{9}{4}$

$=\frac{-332+189}{84}=-\frac{143}{84}=-1\frac{59}{84}$

c) $\frac{4x^3y^3}{(2x^2y)^2}=\frac{4x^3y^3}{2^2x^{2\cdot 2}y^2}=\frac{\cancel{4}x^3y^3}{\cancel{4}x^4y^2}=x^3y^3x^{-4}y^{-2}=x^{3-4}y^{3-2}=x^{-1}y=\frac{y}{x}$

d) $(a-b)^2+2a(a-b)=(a-b)(a-b)+2a(a-b)=a^2-ab-ba+(-b)^2$
$+2a^2-2ab$
$=3a^2-4ab+b^2$

2. a) $f(-2)=2\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+1=2\cdot 4+4\cdot 2+1=8+8+1=17$

b) Funktion kuvaaja $y=2x+1$ on suora, jonka kulmakerroin on 2 ja joka leikkaa y-akselin pisteessä (0, 1). Yhtälö $2x+1=4$ toteutuu sillä suoran pisteen x-koordinaatilla, jonka y-koordinaatti on 4. Kuvaajasta voidaan arvioida, että kun suoran pisteen y-koordinaatti on 4, niin vastaava x-koordinaatti on n. 1,5.

3. a)
$5(x-2)-2(x+1)=4x+1$
$5x-10-2x-2=4x+1$
$3x-4x=1+12$
$-x=13 \quad |\cdot(-1)$
$x=-13$

b)
$\frac{5x+1}{4}=\frac{2x-1}{2} \quad |\cdot 4$
$5x+1=2(2x-1)$
$5x+1=4x-2$
$5x-4x=-2-1$
$x=-3$

c)
$\frac{5x}{2}-\frac{x+1}{4}=\frac{2x-4}{6} \quad |\cdot 12$
$6\cdot 5x-3(x+1)=2(2x-4)$
$30x-3x-3=4x-8$
$27x-4x=-8+3$
$23x=-5 \quad |:23$
$x=-\frac{5}{23}$

4. a)
$5x^2=125 \quad |:5$
$x^2=25 \quad |\pm\sqrt{\ }$
$x=\pm 5$

b)
$x^2=3x$
$x^2-3x=0$
$x(x-3)=0$
$x=0$ tai $x-3=0$
$x=0$ tai $x=3$

c)
$2x^2-5x=3$
$2x^2-5x-3=0$
$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$
$x=\frac{5\pm 7}{4}$
$x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ tai $x=\frac{12}{4}=3$

5. Merkitään alkuperäistä hintaa x:llä. Marraskuussa hinta oli $1{,}12x$ ja siis joulukuussa $1{,}10\cdot 1{,}12x=1{,}232x$. Jos hinta alennetaan takaisin x:ään, on alennus $\frac{1{,}232x-x}{1{,}232x}=\frac{(1{,}232-1)\cancel{x}}{1{,}232\cancel{x}}=\frac{0{,}232}{1{,}232}\approx 0{,}188=18{,}8\,\%$.

6. 49 vuorokauden ikäisenä kasvin varsi on 16 mm:n paksuinen eli
$k\sqrt{49}=16$
$k\cdot 7=16 \quad |:7$
$k=\frac{16}{7}$

Siis, kun $t=100$, niin $d=k\sqrt{t}=\frac{16}{7}\cdot\sqrt{100}=\frac{16}{7}\cdot 10\approx 23$ mm.

7. Merkitään x:llä sitä määrää, joka 80 %:sta liuosta tarvitaan. Tällöin sekoitusta on $x+5$ litraa, ja puhtaan aineen määrälle saadaan yhtälö:

$0{,}1\cdot 5+0{,}8x=0{,}5(5+x)$
$0{,}5+0{,}8x=2{,}5+0{,}5x$
$0{,}8x-0{,}5x=2{,}5-0{,}5$
$0{,}3x=2 \quad |:0{,}3$
$x=\frac{2}{0{,}3}\approx 6{,}7$ litraa.

8. Meteoriitti lentää 12 mailia eli $12\cdot 1\,609=19\,308$ metriä sekunnissa, joten se lentää minuutissa $60\cdot 19\,308=1\,158\,480$ metriä ja tunnissa $60\cdot 1\,158\,480=69\,508\,800$ metriä eli noin 70 000 kilometriä.

HARJOITUSKOE 2

1. a) $(2xy)^2 - x^2y + 4 = 2^2x^2y^2 - x^2y + 4 = 4x^2y^2 - x^2y + 4$

b) $y^2x - 2(xy^2 - 4x) + 16x = xy^2 - 2xy^2 + 8x + 16x = -xy^2 + 24x$

c) $\dfrac{(6x^2y)^2}{2xy} = \dfrac{6^2x^{2\cdot2}y^2}{2xy} = \dfrac{36}{2}x^4y^2x^{-1}y^{-1} = 18x^{4-1}y^{2-1} = 18x^3y$

d) $1 - 4^{-1} + 2^{-2} = 1 - \dfrac{1}{4^1} + \dfrac{1}{2^2} = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$

2. a) $5(x^2 - 4x) - 4(x^2 - 5x + 1) = 5x^2 - 20x - 4x^2 + 20x - 4 = x^2 - 4$

b) $(-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$

c) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x = \pm 2$

d) Kuvaaja $y = x^2 - 4$ voidaan piirtää koordinaatistoon esimerkiksi taulukoimalla sen pisteiden koordinaattien arvoja:

x	$y = x^2 - 4$	(x, y)
−3	$(-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$	(−3, 5)
−2	$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	(−2, 0)
−1	$(-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	(−1, −3)
0	$0^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	(0, −4)
1	$1^2 - 4 = -3$	(1, −3)
2	$2^2 - 4 = 0$	(2, 0)
3	$3^2 - 4 = 5$	(3, 5)

Tämän jälkeen pisteet voidaan merkitä koordinaatistoon ja näiden avulla saadaan piirrettyä kuvaaja.

3. Palkankorotuksen jälkeen Merjan veroton palkka oli $1{,}1 \cdot 1560 = 1716$ € (100 % + 10 % = 110 %). Tästä jäi käteen 1235,52 €, jolloin verojen osuus oli $\dfrac{1716 - 1235{,}52}{1716} = 0{,}28 = 28\,\%$.

4. a)

$5x + 3 = -4(2x - 5)$

$5x + 3 = -8x + 20$

$5x + 8x = 20 - 3$

$13x = 17 \quad | :13$

$x = \dfrac{17}{13}$

b)

$\dfrac{5x+1}{2} + \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x}{15} + 1 \quad | \cdot 30$

$15(5x+1) + 10(x+2) = 2x + 30$

$75x + 15 + 10x + 20 = 2x + 30$

$85x - 2x = 30 - 35$

$83x = -5 \quad | :83$

$x = -\dfrac{5}{83}$

c)

$2x^2 - 4 = 0$

$2x^2 = 4 \quad | :2$

$x^2 = 2 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{2}$

5. Merkitään kysyttyä nopeutta v:llä. Saadaan verranto:

$\dfrac{20}{35} = \dfrac{40^2}{v^2} \quad |$kerrotaan ristiin

$20v^2 = 35 \cdot 1600 \quad | :20$

$v^2 = \dfrac{56\,000}{20}$

$v^2 = 2800 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$v = \pm\sqrt{2800} \approx 53$ km/h

6. a)

$5x^2 - 4x = 0$

$5x\left(x - \dfrac{4}{5}\right) = 0$

$5x = 0$ tai $x - \dfrac{4}{5} = 0$

$x = 0$ tai $x = \dfrac{4}{5}$

b)

$4x(x+1) = -1$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$

$x = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = -\dfrac{1}{2}$

c)

$2(x+1)^2 = -1 \quad | :2$

$(x+1)^2 = -\dfrac{1}{2} \quad |$aina epätosi, koska $a^2 \geq 0$ aina

(ei siis voi myöskään olla $(x+1) < 0$)

$\Rightarrow$ Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

7. v = kysytty nopeus
x = Vaasan ja Helsingin välinen etäisyys
t_1 = ajoaika Vaasasta Helsinkiin
t_2 = ajoaika Helsingistä Vaasaan

Tiedetään, että $\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$, joten $\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$.

Siis $t_1 = \frac{x}{50}$ ja $t_2 = \frac{x}{v}$.

Näiden avulla saadaan koko matkan keskinopeus:

$$\frac{x+x}{t_1+t_2} = 100$$
$$\frac{2x}{\frac{x}{50}+\frac{x}{v}} = 100$$
$$\frac{2x}{\frac{xv+50x}{50v}} = 100$$
$$\frac{2\cancel{x}\cdot 50v}{\cancel{x}(v+50)} = 100$$
$$\frac{100v}{v+50} = 100 \quad | \cdot (v+50)$$
$$100v = 100(v+50)$$
$$100v = 100v + 5\,000$$
$$0 = 5\,000 \quad | \text{aina epätosi}$$

Yhtälöllä ei siis ole ratkaisua eli auton keskinopeudeksi ei ole mahdollista saada 100 km/h.

8. $(a+b)^2 - (a-b)^2$
$= (a^2 + ab + ba + b^2) - (a^2 - ab - ba - b^2)$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$= 4ab$
Kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$, niin
$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab = 4 \cdot 100^{300} \cdot 100^{-300} = 4 \cdot 100^{300-300} = 4 \cdot 100^0$
$= 4 \cdot 1 = 4$

HARJOITUSKOE 3

1. a) $\frac{x}{3} - \frac{x-3}{2} = x + \frac{x+6}{13}$

$$\frac{2x-3(x-3)}{6} = \frac{13x+x+6}{13}$$
$$\frac{-x+9}{6} = \frac{14x+6}{13} \quad | \text{kerrotaan ristiin}$$
$$13(-x+9) = 6(14x+6)$$
$$-13x+117 = 84x+36$$
$$-13x-84x = 36-117$$
$$-97x = -81$$
$$x = \frac{81}{97}$$

b) $3(2x-3)+2 = x+2\left(\frac{5}{2}x-4\right)$

$$6x-9+2 = x+5x-8$$
$$6x-6x = -8+7$$
$$0 = -1 \quad | \text{aina epätosi}$$
$$\Rightarrow \text{Yhtälöllä ei ole ratkaisua}$$

c) $2x(x+3)-3(2x-1) = 9-4x$

$$2x^2+6x-6x+3 = 9-4x$$
$$2x^2+4x-6 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}$$
$$x = \frac{-4 \pm 8}{4}$$
$$x = \frac{-12}{4} = -3 \text{ tai } x = \frac{4}{4} = 1$$

2. a) $(x-2)(3x+4) = 3x^2 + 4x - 6x - 8 = 3x^2 - 2x - 8$
$5(3x+4) = 15x + 20$

b) $(x-2)(3x+4) = 5(3x+4)$

$$3x^2 - 2x - 8 = 15x + 20$$
$$3x^2 - 17x - 28 = 0$$
$$x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\cdot 3\cdot(-28)}}{2\cdot 3}$$
$$x = \frac{17 \pm 25}{16}$$
$$x = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \text{ tai } x = \frac{42}{6} = 7$$

3. Maaliskuusta on jäljellä kuusi päivää (26., 27., 28., 29., 30. ja 31.).
Yhteensä päiviä on koko vuonna jäljellä:
6 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 281. Siis loppuvuonna öljyä tarvitaan 281 · 11 = 3091 litraa eli 3000 litraa ei riitä.

4. Todetaan ensin, että tulee olla $4x + 5 \neq 0$ eli $x \neq -\frac{5}{4}$

Ratkaistaan yhtälö: $\frac{2x+3}{4x+5} = 1 \quad | \cdot (4x+5)$

$$2x + 3 = 4x + 5$$
$$2x - 4x = 5 - 3$$
$$-2x = 2 \quad | : (-2)$$
$$x = -1$$

Muita ratkaisuja yhtälöllä ei ole vaan −1 on sen ainoa juuri.

5. $\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$ eli $\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$, joten

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^5 \text{ km}}{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{7{,}6 \cdot 10^8 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{7{,}6}{3} \text{ s} \approx 2{,}5 \text{ s}$$

6. Merkitään normaalia kilohintaa x:llä. Tällöin alennettu hinta oli $0{,}65x$ (100 % − 35 % = 65 % = 0,65). Siis kokonaishinta oli $0{,}25x + 0{,}75 \cdot 0{,}65x = 0{,}25x + 0{,}4875x = 0{,}7375x$ eli 73,75 % normaalista kahvikilon hinnasta. Siis kokonaishinta oli 100 % − 73,75 % = 26,25 % halvempi kuin normaali hinta.

7. Merkitään koko roskamäärää x:llä. Roskapaperia on 64,3 % kokonaismäärästä eli $0{,}643x$ ja muovia 17,7 % kokonaismäärästä eli $0{,}177x$.
Roskapaperin määrä pienenee puoleen eli roskan kokonaismäärä vähenee $\frac{0{,}643x}{2} = 0{,}3215x$ verran. Muovin määrä pienenee kahteen kolmasosaan, ts. pienenee kolmasosalla, jolloin roskan kokonaismäärä vähenee $\frac{0{,}177x}{3} = 0{,}059x$. Roskamäärä vähenee siis yhteensä
$0{,}3215x + 0{,}059x = 0{,}3805x$ eli noin 38,1 %.

8. Käytetään ratkaisukaavaa: $2x^2 - ax + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4}$$

Yhtälöllä on vain yksi ratkaisu silloin, kun neliöjuurilauseke on nolla eli kun

$$a^2 - 16 = 0$$
$$a^2 = 16 \quad | \pm \sqrt{\ }$$
$$a = \pm 4$$