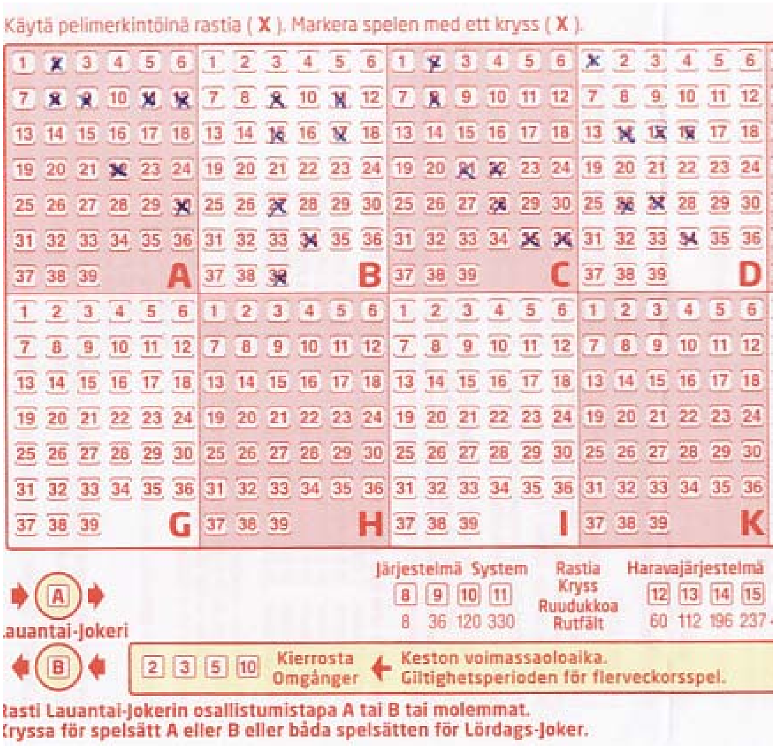
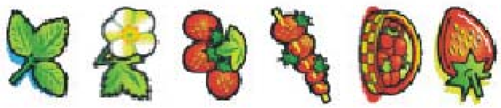
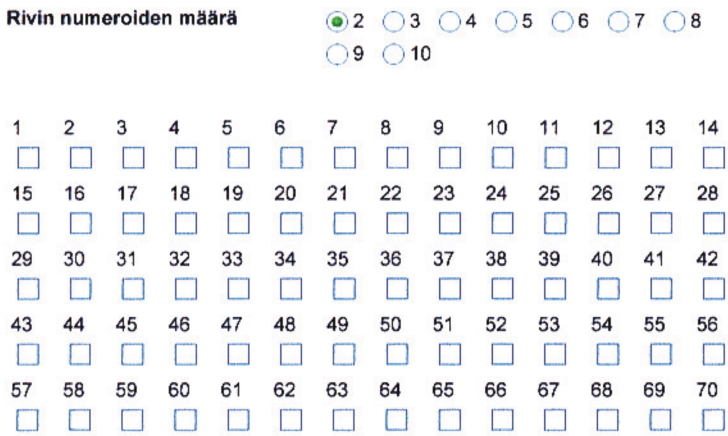
Lukion

Calculus

Täydentävä aineisto







PELIEN MATEMATIIKKA

Paavo Jäppinen
Alpo Kupiainen
Matti Räsänen

OTAVA

Pelien matematiikka

1 Johdanto

Käsillä oleva Pelien matematiikka -kooste on tarkoitettu täydentämään sitä lukion pitkän matematiikan kurssia, joka sisältää todennäköisyyslaskennan perusteet. Esityksessä keskitytään peleissä esiintyviin todennäköisyyksiin. On kiinnostavaa muistaa, että todennäköisyyslaskenta sai alkunsa juuri peleihin liittyvien todennäköisyyksien pohdinnasta. Ranskassa kuten muissakin maissa harrastettiin 1600-luvulla vedonlyöntiä ja uhkapelejä ja arvioitiin voiton mahdollisuuksia. Tunnetuksi on tullut aatelismies *de Méré*, joka yritti selvittää erään noppapelin todennäköisyyksiä siinä kuitenkaan onnistumatta.

Päästäkseen selvyyteen ongelmasta de Méré kääntyi tunnetun matemaatikon *Blaise Pascalin* puoleen. Ongelman erikoislaatuisuus kiinnosti Pascalia, ja hän ryhtyi kirjeenvaihtoon toisen suuren matemaatikon *Pierre Fermat'n* kanssa. Varsin lyhyessä ajassa nämä kaksi matemaatikkoa kehittivät pääpiirteissään klassisen todennäköisyyden teorian 1600-luvun puolessa välissä. Nykyaikaisen todennäköisyyslaskennan aksiomatiikka luotiin vasta 1900-luvulla, kun *Andrei Kolmogorov* selkiytti todennäköisyyslaskennan teoreettiset perusteet.

Seuraavassa esityksessä keskitytään muutamiin yleisimpiin, tuloksiltaan täysin sattumasta riippuviin peleihin ja lasketaan niihin liittyviä voiton todennäköisyyksiä. Aihepiiri sovitetaan lukion todennäköisyyslaskennan kurssin oppisisältöön ja tavoitteisiin.

2 Lotto

Lotto uudistui kesäkuun 2014 alussa. Uudistettujen sääntöjen mukaan Lotto on numeroveikkaus, jossa arvotaan seitsemän (7) numeroa ja kaksi (2) lisänumeroa kolmestakymmenestäyhdeksästä (39) numerosta. Pelaaminen tapahtuu pelaajan itsensä valitsemilla tai järjestelmän arpomilla numeroilla. Ohessa on lottokupongin yksi peliruutu, johon on rastein merkitty pelaajan valitsemat numerot. Yhden lottorivin hinta on 1,00 euroa.

Loton voittoluokat ovat:
1. voittoluokka seitsemän (7) oikein
2. voittoluokka kuusi ja yksi lisänumero (6 + 1) oikein
3. voittoluokka kuusi (6) oikein
4. voittoluokka viisi (5) oikein
5. voittoluokka neljä (4) oikein

Loton 39 numerosta voidaan valita seitsemän numeroa $\binom{39}{7} = 15\,380\,937$ eri tavalla. Toisin sanoen erilaisia lottorivejä on olemassa 15 380 937 kappaletta. Näistä tarkalleen yhdessä on täysosuma eli 7 oikein. Erilaisten lottorivien lukumäärä esiintyy seuraavissa todennäköisyyksissä, jotka on muodostettu kombinaatio-opin säännöillä.

1) $P(7 \text{ oikein}) = \dfrac{1}{15\,380\,937} \approx 0{,}0000065\ \%$

2) P(6 + 1 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{6}\cdot\binom{2}{1}}{15\,380\,937} = \dfrac{14}{15\,380\,937} \approx 0{,}000091\,\%$. Osoittajassa $\binom{7}{6} = 7$ ilmoittaa, kuinka monella tavalla 7 oikean numeron joukosta voidaan valita 6 numeroa. Vastaavasti on $\binom{2}{1} = 2$ tapaa valita arvonnan antamista lisänumeroista yksi. Tuloperiaatteen nojalla yhdistelmiä 'kuusi ja yksi lisänumero' on näin ollen 14 kappaletta.

3) P(6 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{6}\cdot\binom{30}{1}}{15\,380\,937} = \dfrac{210}{15\,380\,937} \approx 0{,}0014\,\%$. Osoittajan luku $\binom{30}{1} = 30$ ilmoittaa, kuinka monella tavalla voidaan valita yksi sellainen numero, joka ei ole oikea numero eikä lisänumero. Vastaavasti muodostetaan alla olevat lukumäärät.

4) P(5 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{5}\cdot\binom{32}{2}}{15\,380\,937} = \dfrac{10\,416}{15\,380\,937} \approx 0{,}068\,\%$

5) P(4 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{4}\cdot\binom{32}{3}}{15\,380\,937} = \dfrac{173\,600}{15\,380\,937} \approx 1{,}13\,\%$

6) P(3 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{3}\cdot\binom{32}{4}}{15\,380\,937} = \dfrac{1\,258\,600}{15\,380\,937} \approx 8{,}18\,\%$

7) P(2 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{32}{5}}{15\,380\,937} = \dfrac{4\,228\,896}{15\,380\,937} \approx 27{,}49\,\%$

8) P(1 oikein) = $\dfrac{\binom{7}{1}\cdot\binom{32}{6}}{15\,380\,937} = \dfrac{6\,343\,344}{15\,380\,937} \approx 41{,}24\,\%$

9) P(0 oikein) = $\dfrac{\binom{32}{7}}{15\,380\,937} = \dfrac{3\,365\,856}{15\,380\,937} \approx 21{,}88\,\%$

Kun lototaan yksi rivi, tuloksena voi olla mikä tahansa edellä lasketuista yhdeksästä vaihtoehdosta. Koska kysymyksessä ovat toisaalta kaikki vaihtoehdot, niiden todennäköisyyksien summa on 1. Voidaan panna merkille, että tapahtuman 'kaikki väärin' mahdollisuus on vasta kolmanneksi suurin. Tulosten mukaan yleisin tapahtuma on 'yksi oikein'.

Tuplaus

Uudistuksen myötä Lottoon tuli vapaaehtoinen Tuplaus-ominaisuus. Pelaaja voi valita kyseisen ominaisuuden 0,25 euron lisähintaan, jolloin rivihinta on yhden euron asemesta 1,25 euroa. Tuplaus toimii niin, että ensin arvotaan Tuplausnumero 39 numeron joukosta, minkä jälkeen suoritetaan varsinainen lottoarvonta eli arvotaan 39 numerosta 7 numeroa ja 2 lisänumeroa. Jos Tuplausnumero sattuu olemaan **pelaajan omassa rivissä** ja rivi sisältää jonkin voiton, pelaaja saa tuon voiton kaksinkertaisena. Tuplausnumeron ei siis tarvitse välttämättä olla 7 oikean ja 2 lisänumeron joukossa.

Esimerkki 1
Täytetään yksi lottoruudukko rastimalla siitä seitsemän numeroa. Millä todennäköisyydellä saadaan jokin lottovoitto?

Ratkaisu:
Lottovoitto on mikä tahansa voitto viidestä voittoluokasta. Voittoluokat ovat tapahtumina erillisiä. Jos esimerkiksi rivissä on tarkalleen 5 oikein, rivin ei katsota enää sisältävän 4 oikein -tapauksia. Näin ollen (edellä laskettuja tarkkuuksia käyttäen)

P(lottovoitto) = P(1. vl tai 2. vl tai 3. vl tai 4. vl tai 5. vl = voittoluokka)
$\approx$ 0,0000065 % + 0,000091 % + 0,0014 % + 0,068 % + 1,13 %
= 1,1994975 %
$\approx$ 1,2 %.

Vastaus: Lottovoiton mahdollisuus on noin 1,2 %.

Järjestelmät

Lottoriviä, johon on valittu seitsemän numeroa 39:stä, sanotaan *hajariviksi*. Lottoruudukon voi täyttää myös niin, että siitä valitaan 8, 9, 10 tai 11 numeroa. Näin muodostunutta peliä sanotaan *järjestelmäksi* ja riviä *järjestelmäriviksi*. Lottokuponkia käytettäessä järjestelmä tehdään kupongin A-ruudukkoon.

Järjestelmärivi sisältää kaikki erilaiset hajarivit, jotka voidaan muodostaa käyttämällä valittuja numeroita. Jos järjestelmään valittuja numeroita on n kappaletta, järjestelmä sisältää $\binom{n}{7}$ erilaista seitsemän lottonumeron kombinaatiota eli hajariviä. Tämä mukaan eri järjestelmät sisältävät $\binom{8}{7} = 8$, $\binom{9}{7} = 36$, $\binom{10}{7} = 120$ tai $\binom{11}{7} = 330$ hajariviä. Järjestelmän hinta on sen sisältämien hajarivien määrä kertaa yhden hajarivin hinta.

Jos järjestelmärivi sisältää voiton jostakin voittoluokasta, se voi silloin sisältää niitä useampiakin ja samalla tavallisesti myös alavoittoja eli pienempiä voittoluokkia. Otetaan tästä jokin esimerkki.

Esimerkki 2
Mitä voittoja sisältää sellainen Loton järjestelmärivi, jossa on
a) 9 numeroa ja niiden joukossa 5 oikeaa numeroa,
b) 9 numeroa ja niiden joukossa 6 oikeaa numeroa ja 1 lisänumero,
c) 8 numeroa ja niiden joukossa 7 oikeaa numeroa?

Ratkaisu:
a) Väärät kaksi numeroa voidaan valita neljästä $\binom{4}{2} = 6$ eri tavalla, joten rivi sisältää 6 kappaletta 5 oikein -rivejä.
Viiden oikean numeron joukosta voidaan valita neljä oikeaa $\binom{5}{4} = 5$ eri tavalla. Järjestelmärivissä olevan neljän väärän numeron joukosta voidaan valita kolme numeroa $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla. Tuloperiaatteen mukaan järjestelmä sisältää $5 \cdot 4 = 20$ kappaletta 4 oikein -rivejä.

b) Rivi sisältää yhden 6 + 1 -voiton. Sen lisäksi rivissä on 4 oikein -rivejä $\binom{6}{4}\cdot\binom{3}{3}=15$, 5 oikein -rivejä $\binom{6}{5}\cdot\binom{3}{2}=18$ ja 6 oikein -rivejä $\binom{6}{6}\cdot\binom{2}{1}=2$ kappaletta. Huomaa, että viimeksi lasketussa voittoluokassa oikeaa lisänumeroa ei enää valita.

c) Rivi sisältää yhden täysosuman. Sen lisäksi siinä on $\binom{7}{6}=7$ kappaletta 6 oikein -rivejä. Nämä muodostuvat valitsemalla oikeista numeroista kuusi ja liittämällä kuhunkin yhdistelmään mukaan (sama) väärä numero. Muita voittoja ei ole, sillä esimerkiksi viiden oikean numeron yhdistelmät ovat jo mukana edellisissä voittoluokissa.

Vastaus:
a) 5 oikein -rivejä 6 ja 4 oikein -rivejä 20
b) 6 + 1 oikein -rivejä 1, 6 oikein -rivejä 2, 5 oikein -rivejä 18 ja 4 oikein -rivejä 15
c) 7 oikein -rivejä 1 ja 6 oikein -rivejä 7

Haravat

Harava on lottojärjestelmä, jossa ruudukon 39 numerosta valitaan 12, 13, 14, 15, 16 tai 18 numeroa. Haravajärjestelmä on epätäydellinen järjestelmä siinä mielessä, että se ei sisällä kaikkia niitä hajarivejä, jotka voitaisiin muodostaa pelaajan valitsemista numeroista. Jos esimerkiksi ruudukosta valitaan 12 numeroa, niistä voitaisiin muodostaa $\binom{12}{7}=792$ erilaista hajariviä. Haravajärjestelmään näistä valitaan kuitenkin vain 60 riviä, ja ne määräytyvät online-järjestelmässä. Haravajärjestelmissä valittujen rivien lukumäärä on vastaavasti 60, 112, 196, 237, 439 ja 600. Järjestelmän hinta on tämän lukumäärän ja yhden rivihinnan tulo.

Mikäli haravajärjestelmään osuu jokin Loton voittoluokista 7, 6 + 1, 6, 5 tai 4, kannattaa peliä tarkastella lähemmin. Voittoa ei näe suoraan haravajärjestelmän numeroista. Sen saa selville esimerkiksi omalta pelisivustolta tai käyttämällä apuna Veikkauksen verkkosivuston Rastipekka-nimistä työkalua.

Lottokupongissa haravajärjestelmä täytetään kupongin A-ruudukkoon.

Tehtäviä

1. Kuinka paljon maksaa Loton **a)** 10 numeron järjestelmä, **b)** 16 numeron haravajärjestelmä, kun yksi hajarivi maksaa yhden euron?

2. Mitä voittoja sisältää sellainen Loton järjestelmärivi, jossa on
a) 9 numeroa ja niiden joukossa 6 oikeaa numeroa,
b) 10 numeroa ja niiden joukossa 6 oikeaa numeroa ja 2 lisänumeroa,
c) 11 numeroa ja niiden joukossa 5 oikeaa numeroa?

3 Viking Lotto

Viking Lotto on kansainvälinen lottopeli, jossa arvotaan kuusi (6) numeroa ja kaksi (2) lisänumeroa neljästäkymmenestäkahdeksasta (48) numerosta. Näiden lisäksi arvotaan yksi (1) numero neljästäkymmenestäkahdeksasta (48) numerosta ns. Onnennumeroksi. Onnennumero arvotaan ennen oikean rivin arvontaa, ja kyseinen numero palautetaan takaisin arvontakoneeseen. Mikäli Onnennumero esiintyy kyseisen kierroksen 6 oikein -numeroiden joukossa, jaetaan ylimääräinen voittopotti pelissä täysosuman saaneiden kesken. Pelitiedot annetaan pelikupongilla toimipaikan online-päätteen välityksellä tai itsepalveluna internetiä tai puhelinta käyttäen.

Viking Loton voittoluokat ovat:

1. voittoluokka kuusi (6) oikein
2. voittoluokka viisi (5) ja yksi lisänumero (5 + 1) oikein
3. voittoluokka viisi (5) oikein
4. voittoluokka neljä (4) ja kaksi lisänumeroa (4 + 2) oikein
5. voittoluokka neljä (4) ja yksi lisänumero (4 + 1) oikein
6. voittoluokka neljä (4) oikein
7. voittoluokka kolme (3) ja kaksi lisänumeroa (3 + 2) oikein
8. voittoluokka kolme (3) ja yksi lisänumero (3 + 1) oikein
9. voittoluokka kolme (3) oikein
10. voittoluokka kaksi (2) ja kaksi lisänumeroa (2 + 2) oikein
11. voittoluokka kaksi (2) ja yksi lisänumero (2 + 1) oikein

Viking Lottoa voi pelata myös tavallisena järjestelmäpelinä Loton tapaan tai haravajärjestelmänä. Tavallisessa järjestelmässä valitaan 7, 8, 9, 10 tai 11 numeroa ja haravajärjestelmässä 12–20 tai 24 numeroa. Lasketaan voittoluokkien todennäköisyydet.

$$\mathrm{P}(6\text{ oikein}) = \frac{1}{\binom{48}{6}} = \frac{1}{12\,271\,512} \approx 0{,}0000081\ \%$$

$$\mathrm{P}(5+1\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{48}{6}} = \frac{12}{12\,271\,512} \approx 0{,}000098\ \%$$

$$\mathrm{P}(5\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{48}{6}} = \frac{240}{12\,271\,512} \approx 0{,}00196\ \%$$

$$\mathrm{P}(4+2\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{48}{6}} = \frac{15}{12\,271\,512} \approx 0{,}000122\ \%$$

$$\mathrm{P}(4+1\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{48}{6}} = \frac{1\,200}{12\,271\,512} \approx 0{,}00978\ \%$$

$$\mathrm{P}(4\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{40}{2}}{\binom{48}{6}} = \frac{11\,700}{12\,271\,512} \approx 0{,}09534\ \%$$

$$P(3+2\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{48}{6}} = \frac{800}{12\,271\,512} \approx 0{,}00652\ \%$$

$$P(3+1\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{40}{2}}{\binom{48}{6}} = \frac{31\,200}{12\,271\,512} \approx 0{,}25425\ \%$$

$$P(3\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{40}{3}}{\binom{48}{6}} = \frac{197\,600}{12\,271\,512} \approx 1{,}61023\ \%$$

$$P(2+2\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{40}{2}}{\binom{48}{6}} = \frac{11\,700}{12\,271\,512} \approx 0{,}09534\ \%$$

$$P(2+1\text{ oikein}) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{40}{3}}{\binom{48}{6}} = \frac{296\,400}{12\,271\,512} \approx 2{,}415\ \%$$

Esimerkki 1
Laske todennäköisyys sille, että Viking Lotossa saadaan yhdellä rivillä vähintään viisi oikein.

Ratkaisu:
P(vähintään 5 oikein) = P(5 oikein tai 5 + 1 oikein tai 6 oikein)

$$= \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{40}{1}+\binom{6}{5}\cdot\binom{2}{1}+1}{\binom{48}{6}} = \frac{253}{12\,271\,512} \approx 0{,}0021\,\%.$$

Vastaus: noin 0,0021 %

Esimerkki 2
Mitä voittoja sisältää sellainen Viking Loton järjestelmärivi, jossa on 11 numeroa ja niiden joukossa 6 oikeaa numeroa ja 1 lisänumero?

Ratkaisu:

Rivi sisältää yhden 6 oikein -voiton ja $\binom{6}{5}=6$ kappaletta 5 + 1 oikein -voittoja. Lisäksi 5 oikein -voittoja on $\binom{6}{5}\cdot\binom{4}{1}=24$, 4 + 1 oikein -voittoja $\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}=60$, 4 oikein -voittoja $\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2}=90$, 3 + 1 oikein -voittoja $\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2}=120$, 3 oikein -voittoja $\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{3}=80$ sekä 2 + 1 oikein voittoja $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}=60$ kappaletta.

Vastaus: 6 oikein -voittoja 1, 5 + 1 -oikein voittoja 6, 5 oikein -voittoja 24, 4 + 1 oikein -voittoja 60, 4 oikein -voittoja 90, 3 + 1 oikein -voittoja 120, 3 oikein -voittoja 80 kpl ja 2 + 1 oikein -voittoja 60 kappaletta

Tehtäviä

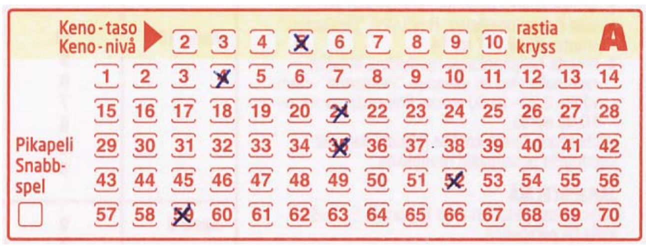
3. Laske todennäköisyys sille, että Viking Lotossa ei saada yhdellä rivillä mitään voittoa kyseisen pelin voittoluokista.

4. Kuinka paljon maksaa Viking Loton 11 numeron järjestelmäpeli, kun yksi hajarivi maksaa 0,80 €?

5. Mitä voittoja sisältää sellainen Viking Loton järjestelmärivi, jossa on
a) 10 numeroa ja niiden joukossa 4 oikeaa numeroa,
b) 10 numeroa ja niiden joukossa sekä 6 oikeaa numeroa että 2 lisänumeroa?

4 Keno

Kenossa arvotaan 20 numeroa 70:stä. Pelaaja valitsee itse vaikeustasonsa pelaamalla joko 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tai 10 numeroa riviinsä. Kenon oikea rivi arvotaan kahdesti joka päivä, toinen arvonta päivällä toinen illalla. Pelitiedot voi syöttää järjestelmään pelikupongilta toimipaikoissa tai pelaamiseen voi osallistua internetin välityksellä tai puhelinta käyttäen. Peruspelissä pelaaja merkitsee kenoruudukkoon vähintään kaksi ja enintään kymmenen numeroa 70 numerosta.



Keno-tason numero ilmaisee, kuinka monta pelinumeroa yksittäiseen peliriviin sisältyy. Esimerkiksi pelissä Keno-5 pelaaja valitsee ruudukosta viisi numeroa. Jokaisella vaikeustasolla on oma voitonjakonsa. Esimerkiksi Keno-5:ssä voittoon oikeuttavat tulokset ja voittokertoimet ovat seuraavat:

Keno-5	5 oikein, kerroin = 200
	4 oikein, kerroin = 9
	3 oikein, kerroin = 1

Voittosumma saadaan kertomalla Kenon pelimaksu tulosta vastaavalla kertoimella. Yksittäisessä pelirivissä voi olla vain yksi voittotulos.

Esimerkki 1
Laske pelissä Keno-5 todennäköisyys sille, että saadaan **a)** 5, **b)** 4, **c)** 3 oikein.

Ratkaisu:

a) 70 numerosta voidaan valita 5 numeroa $\binom{70}{5}$ eri tavalla. Kaikki oikeat 5 numeroa voidaan valita $\binom{20}{5}$ eri tavalla, joten $P(5 \text{ oikein}) = \dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{70}{5}} \approx 0{,}13\ \%$.

b) Tässä vaihtoehdossa valitaan yksi väärä numero 50 numeron joukosta.

$P(4 \text{ oikein}) = \dfrac{\binom{20}{4}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{70}{5}} \approx 2{,}00\ \%$.

c) $P(3 \text{ oikein}) = \dfrac{\binom{20}{3}\cdot\binom{50}{2}}{\binom{70}{5}} \approx 11{,}54\ \%$.

Vastaus: **a)** 0,13 % **b)** 2,00 % **c)** 11,54 %

Jokainen peli Kenon yhdeksällä eri tasolla on eri peli, koska niillä on toisistaan eroava voitonjako. Arvonta on kuitenkin sama kaikilla tasoilla, eli kaikille pelaajille arvotaan samat 20 numeroa 70 numerosta.

Pelaaja voi valita itse numeronsa tai antaa pelijärjestelmän valita ne. Pelin panoksen voi valita 0,50 euron välein väliltä 0,5–10 euroa, jolloin pelin hinta on panoksen lukuarvo kertaa perushinta. Jokaisella tasolla perushinta on sama, esimerkiksi 1,00 €. Kenoa voi pelata myös järjestelmäpelinä. Tällöin valitaan ensin kenotaso väliltä 2 – 9 ja sen jälkeen numeroiden määrä 3:sta 10:een kuitenkin niin, että numeroiden määrä on aina suurempi kuin kenotason numero.

Esimerkki 2
Pelaaja valitsee kenojärjestelmässä tason Keno-5 ja siihen 10 numeroa. Panokseksi hän valitsee 3,00 €. Kuinka paljon peli maksaa, kun tavallinen kenorivi maksaa yhden euron?

Ratkaisu:

Kymmenen numeroa sisältää $\binom{10}{5} = 252$ erilaista viiden numeron yhdistelmää eli tason Keno-5 peliä. Koska jokainen niistä maksaa panoksen valinnan takia $3{,}00 \cdot 1{,}00$ € = 3,00 €, pelin hinta on 756,00 €.

Vastaus: 756,00 €

Tehtäviä

6. **a)** Laske pelissä Keno-7 todennäköisyys sille, että saadaan 5 oikein.
b) Laske pelissä Keno-10 todennäköisyys sille, että saadaan 5 oikein.
c) Laske pelissä Keno-10 todennäköisyys sille, että ei ole yhtään oikein.

7. Ohessa on esitetty Keno-8:n voittoluokat ja vastaavat kertoimet. Pelaaja pelaa yhden rivin tätä peliä ja valitsee panokseksi 2,50 euroa. Millä todennäköisyydellä hän saa 50 euron voiton?

Keno-8
8 oikein, kerroin = 10 000
7 oikein, kerroin = 240
6 oikein, kerroin = 20
5 oikein, kerroin = 3
4 oikein, kerroin = 1

8. Pelaaja valitsee kenojärjestelmässä tason Keno-7 ja siihen 9 numeroa. Panokseksi hän valitsee 2,00 €. Kuinka paljon peli maksaa, kun tavallinen kenorivi maksaa yhden euron?

5 Jokeri

Jokeripelissä arvotaan 7 numeroa numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Keskiviikko-Jokerin arvonta tapahtuu Viking Loton yhteydessä ja Lauantai-Jokerin arvonta Loton yhteydessä. Yhden jokeririvin hinta on 2 euroa. Voittoluokkia on kuusi:

1. voittoluokka: seitsemän oikein
2. voittoluokka: kuusi numeroa oikein oikealla paikalla
3. voittoluokka: viisi numeroa oikein oikealla paikalla
4. voittoluokka: neljä numeroa oikein oikealla paikalla
5. voittoluokka: kolme numeroa oikein oikealla paikalla
6. voittoluokka: kaksi numeroa oikein oikealla paikalla

Jokeria voi pelata myös järjestelmänä. Tällöin jokaisen jokerinumeron paikalle voi valita useita numeroita. Jos esimerkiksi alusta kolmannen numeron kohdalle merkitään yksi vaihtoehto kuten $\begin{matrix}4&6&3&7&8&1&9\\ &&5&&&&\end{matrix}$, saadaan kaksi eri riviä 4 6 3 7 8 1 9 ja 4 6 5 7 8 1 9. Vastaavasti $\begin{matrix}4&6&3&7&8&1&9\\ &&5&&&7&\\ &&&&&4&\end{matrix}$ esittää järjestelmää, jossa on kuusi erilaista jokeririviä. Suurin sallittu järjestelmä voi sisältää 100 riviä. Järjestelmärivin hinta on siihen sisältyvien rivien lukumäärä kertaa yhden rivin hinta.

Esimerkki 1
Millä todennäköisyydellä saadaan Jokerin yhdellä rivillä
a) 3 numeroa oikein (voittoluokka 5),
b) 4 numeroa oikein (voittoluokka 4)?

Ratkaisu:
a) Erilaisia jokeririvejä on $10^7 = 10\,000\,000$. Seitsemästä numeropaikasta voidaan valita kolme $\binom{7}{3} = 35$ eri tavalla. Jokainen neljästä väärästä numerosta voidaan valita 9 eri tavalla, joten näitä ei-oikein -valintoja on $9^4 = 6\,561$ kappaletta. Suotuisia rivejä on siis 35 · 6 561 = 229 635, joten kysytty todennäköisyys on $229\,635 : 10\,000\,000 = 0{,}0229635 \approx 2{,}3\ \%$.

b) Päätellään vastaavasti kuin edellä, jolloin saadaan

$$\text{P(4 numeroa oikein)} = \binom{7}{4} \cdot 9^3 : 10^7 = 35 \cdot 729 : 10\,000\,000 = 0{,}0025515 \approx 0{,}26\ \%.$$

Vastaus: **a)** 2,3 % **b)** 0,26 %

Tehtäviä

9. Millä todennäköisyydellä saadaan Jokerin yhdellä rivillä
a) 6 numeroa oikein (voittoluokka 2),
b) 5 numeroa oikein (voittoluokka 3),
c) 2 numeroa oikein (voittoluokka 6)?

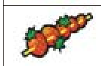
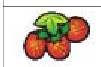
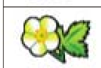
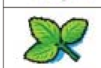
10. **a)** Järjestelmäjokerissa valitaan toiseksi numeroksi kaikki numerovaihtoehdot ja viimeiseksi numeroksi kolme vaihtoehtoa. Kuinka monta eri riviä järjestelmä sisältää?

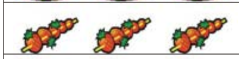
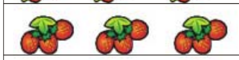
b) Kuinka paljon maksaa oheinen järjestelmäjokeri, kun yksi rivi maksaa 2 euroa?

2	3	1	5	2	1	4
	4		7		3	0
	5				6	
	7				7	
	9				8	

6 Mansikka

Mansikka kuuluun ns. *hedelmäpeleihin*, jotka ovat raha-automaattiyhdistyksen peliautomaatteja. Yhteistä niille on koneessa pyörivät hedelmäaiheiset kiekot. Monista erilaisista hedelmäpeleistä Mansikka on perinteinen ja helppo peli. Siinä on kolme vierekkäistä pyörivää kiekkoa, joissa jokaisessa on 24 kuvasymbolia. Erilaisia kuvia on kuusi, ja niiden määrät ja keskinäiset järjestykset eri kiekoissa vaihtelevat. Alla olevassa vasemmanpuoleisessa taulukossa ovat eri kiekkojen sisältämät kuvat ja niiden lukumäärät. Pelin tuloksena on jokin kuvakolmikko. Oikeanpuoleisessa taulukossa on esitetty voittoon oikeuttavat kuvayhdistelmät ja voittokertoimet.

	Kiekko 1	Kiekko 2	Kiekko 3
	2	2	2
	2	3	3
	4	3	4
	4	4	3
	6	6	6
	6	6	6
	24	24	24

	Kerroin	Tn:t
	20	p_1
	20	p_2
	10	p_3
	10	p_4
2 x 	5	p_5
	4	p_6
	4	p_7
1 x 	2	p_8

Peli aloitetaan syöttämällä peliautomaattiin rahaa ja asettamalla panos. Automaatti käynnistyy nappia painamalla, jolloin kiekot alkavat pyöriä pysähtyen yksitellen satunnaisesti jonkin kuvasymbolin kohdalle. Jos peliä voi pelata esimerkiksi 20, 40, 60, 80 ja 100 sentin panoksilla, suurin voitto on 20 € ja pienin 0,40 €. Edellinen tulee yhden euron panoksella kertoimella 20 ja jälkimmäinen 20 sentin panoksella kertoimen ollessa 2.

Esimerkki 1
Mansikan pelaaja syöttää pelikoneeseen 20 senttiä, asettaa sen myös panokseksi ja käynnistää pelin.
a) Millä todennäköisyydellä hän saa kolme mansikkaa ja kuinka suuri on silloin hänen nettovoittonsa?
b) Laske taulukkoon merkitty todennäköisyys p_6.
c) Millä todennäköisyydellä koneen palauttama voittosumma on 1 €?

Ratkaisu:

a) P(3 mansikkaa) = $\frac{2}{24}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{2}{24}=\frac{1}{1\,728}\approx 0{,}0005787$. Kone ilmoittaa voitoksi 20 · 20 = 400 snt, joten nettovoitto on 380 snt =3,80 €.

b) $p_6=\frac{6}{24}\cdot\frac{6}{24}\cdot\frac{6}{24}=\frac{1}{64}=0{,}015625$

c) Kone palauttaa yhden euron, jos tuloksena on tarkalleen kaksi mansikan kuvaa. Näin käy todennäköisyydellä $p_5=\frac{2}{24}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{22}{24}+\frac{2}{24}\cdot\frac{22}{24}\cdot\frac{2}{24}+\frac{22}{24}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{2}{24}=\frac{33}{1\,728}\approx 0{,}019097$.

Vastaus:

a) $\frac{1}{1\,728}\approx 0{,}058\,\%$, nettovoitto 3,80 € **b)** $\frac{1}{64}\approx 1{,}56\,\%$ **c)** $\frac{33}{1\,728}\approx 1{,}91\,\%$

Mansikka-pelissä on mahdollista aina voitottoman pelin jälkeen lukita yhden tai kahden kiekon symboli niin, että ne eivät vaihdu arvonnassa. Tällainen lukitseminen tuo peliin myös taitoelementin, mutta kysymyksessä on samalla eri peli, jolla on omat voittoluokkansa. Näitä vaihtoehtoja ei tässä käsitellä.

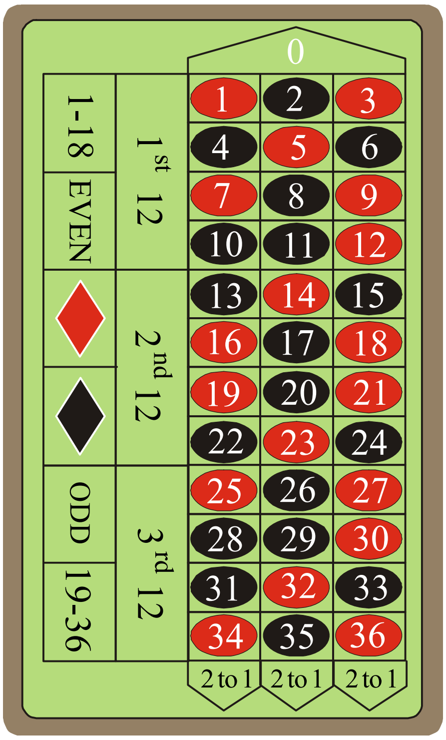
Tehtäviä

11. Millä todennäköisyydellä Mansikassa saadaan yhdellä pelillä kolme mansikan kukkaa tai kolme mansikan lehteä?

12. **a)** Mansikan pelaaja asettaa panokseksi yhden euron ja pelaa yhden pelin. Millä todennäköisyydellä pelikone palauttaa hänelle kaksi euroa?
b) Millä todennäköisyydellä Mansikan pelaaja saa yhdessä pelissä jonkin voiton? Ilmoita vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.

7 Ruletti

Ruletti on yksi tunnetuimmista uhkapeleistä. Siihen kuuluu vaaka-asennossa pyöritettävä kupera levy, *rulettipyörä*, jossa on 37 lokeroa numeroituna 0:sta 36:een. Numeroista joka toinen on punainen ja joka toinen musta nollan ollessa vihreä. Ruletin hoitaja kieräyttää kuulan pyörimään rulettipyörän pyörimissuuntaa vastaan, ja pelaaja lyö vetoa siitä, minkä numeron lokeroon kuula asettuu. Vedonlyönti tapahtuu niin, että pelaaja asettaa pelimerkin ohessa kuvatulle *rulettipöydälle* haluamansa numeron kohdalle.



Osa rulettipyörää

Yhden numeron asemasta pelaaja voi lyödä vetoa monella eri yhdistelmällä ja useampaa kuin yhtä pelimerkkiä käyttäen. Voiton suuruus ilmaistaan *voittokertoimen* avulla. Esimerkiksi yksittäisen numeron voittokerroin 35 : 1. Jos pelaaja sijoittaa pelimerkin esimerkiksi numerolle 21 ja rulettipyörä antaa juuri sen numeron, pelaaja saa sijoittamansa pelimerkin takaisin ja lisäksi voittona 35 uutta pelimerkkiä. Sama koskee kaikensuuruisia panoksia.

Seuraavassa taulukossa on lueteltu tavallisimmat pelimerkin sijoituskohteet eli vedot ja vastaavat voittokertoimet.

Veto		**Voitto-kerroin**
• Yksittäinen numero (Straight up)		35 : 1
• Kaksi numeroa (Split).	Panos asetetaan numeroiden väliselle viivalle	17 : 1
• Kolme numeroa (Street)	Panos asetetaan valitun rivin reunaviivalle.	11 : 1
• Neljä numeroa (Corner)	Panos asetetaan halutun pysty- ja vaakaviivan risteyskohtaan.	8 : 1
• Numerot 1–12 (1st 12)		2 : 1
• Numerot 13–24 (2nd 12)		2 : 1
• Numerot 25–36 (3rd 12)		2 : 1
• Sarake (Column, 2 to 1)		2 : 1
• Numerot 1–18 (Low)		1 : 1
• Numerot 19–36 (High)		1 : 1
• Musta tai punainen (Black, Red)		1 : 1
• Parillinen ($\neq 0$) tai pariton (Even, Odd)		1 : 1

Esimerkki 1

Millä todennäköisyydellä ruletissa saa yhdellä pelimerkillä
a) numeron 22 (Straight up), **b)** numeron toisesta tusinasta (2^{nd} dozen), **c)** numeron valitulta vaakariviltä (Street)?

Ratkaisu:

a) Numeroita on kaikkiaan 37, joten $P(22) = \frac{1}{37} \approx 2{,}70\ \%$.

b) $P(2^{nd}\ 12) = \frac{12}{37} \approx 32{,}43\ \%$ **c)** $P(\text{Street}) = \frac{3}{37} \approx 8{,}11\ \%$

Vastaus: **a)** $\frac{1}{37} \approx 2{,}70\ \%$ **b)** $\frac{12}{37} \approx 32{,}43\ \%$ **c)** $\frac{3}{37} \approx 8{,}11\ \%$

Esimerkki 2

Pelaaja sijoittaa pelimerkin sekä yhdistelmälle Odd että keskimmäiselle sarakeyhdistelmälle (2 to 1).
a) Millä todennäköisyydellä pelaaja voittaa ainakin toisella sijoituksellaan?
b) Rulettipyörä antaa numeron 23. Kuinka monta pelimerkkiä pelinhoitaja palauttaa pelaajalle?

Ratkaisu:
a) Parittomia numeroita on 18 ja keskisarakkeen numeroita 12. Koska näille yhteisiä ovat numerot 5, 11, 17, 23, 29 ja 35, todennäköisyys on $\frac{18+12-6}{37} = \frac{24}{37} \approx 64{,}86\ \%$.
b) Koska 23 on sekä pariton että keskisarakkeessa, pelaaja voittaa 1 + 2 = 3 pelimerkkiä ja saa takaisin alkuperäiset pelimerkit, yhteensä siis 5 pelimerkkiä.

Vastaus: **a)** $\frac{24}{37} \approx 64{,}86\ \%$ **b)** 5

Ruletin voittokertoimet on määritelty niin, että pelin järjestäjälle jää keskimäärin 2,7 % pelipanoksista. Tämä suomalaisessa ruletissa vallitseva käytäntö on edullisempi kuin esimerkiksi amerikkalaisessa ruletissa, jossa järjestäjälle jää keskimäärin 7,9 % sijoituksista. Muutoinkin pelit eroavat toisistaan niin, että amerikkalaisessa rulettipöydässä on lisänä kaksoisnolla 00.

Tehtäviä

13. Pelaaja sijoittaa kullekin yhdistelmistä Even, Red ja Street 25/26/27 yhden pelimerkin.
a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi pelimerkeistä voittaa?
b) Rulettipyörä antaa numeron 27. Kuinka monta pelimerkkiä pelinhoitaja palauttaa pelaajalle?

14. Pelaaja tekee seitsemällä pelimerkillä vedon Black Splits valitsemalla numeroparit 8/11, 10/11, 10/13, 17/20, 26/29, 28/29 ja 28/31. Vedon voittokerroin on 17 : 1.
a) Millä todennäköisyydellä tällä vedolla ainakin yksi pelimerkki voittaa?
b) Rulettipyörä antaa numeron 20. Kuinka monta pelimerkkiä pelinhoitaja palauttaa pelaajalle?

8 Pokeri

Pokeri on korttipeli, josta on lukuisia eri muunnelmia. Pelin perusmuodossa jokaiselle pelaajalle jaetaan viisi korttia. Jakajasta seuraava pelaaja ratkaisee, haluaako hän pelata korteillaan vai ei. Jos hän päättää pelata, hän asettaa pöytään panoksen. Seuraavana vuorossa oleva tekee oman ratkaisunsa: luopuu pelistä, tai jatkaa hyväksymällä panoksen tai korottamalla sitä. Sama menettely toistuu seuraavan pelaajan kohdalla jne. Peli päättyy, kun yksi pelaajista on korottanut eikä kukaan muu ei enää korota tai katso. Voi myös käydä, että ainakin yksi maksaa korotuksen ja haluaa katsoa kortit. Tämän jälkeen paras "käsi" eli arvokkain yhdistelmä voittaa.

Käsien arvojärjestys on seuraava:

Kuningasvärisuora
Samaa maata olevien peräkkäisten korttien yhdistelmä eli värisuora ja paras niistä

Värisuora
Samaa maata oleva suora, joka ei ole kuningasvärisuora

Neloset
Neljä samanarvoista korttia

Täyskäsi
Kolmoset ja pari. Kolmosten arvo ratkaisee täyskäsien paremmuuden.

Väri
Viisi samaa maata olevaa korttia, ei kuitenkaan värisuora eikä kuningasvärisuora

Suora
Viisi peräkkäistä korttia eri maata

Kolmoset
Kolme samanarvoista korttia

Kaksi paria

Pari
Kaksi samanarvoista korttia

Hyvin tavallinen pokerin muunnelma on se, jossa pelaaja kortit saatuaan voi vaihtaa yhden tai useamman kädessään olevan kortin pakasta otettaviin uusiin kortteihin. Peli käynnistyy sitten näin muodostuneella yhdistelmällä. Kahden samanarvoisen käden arvojärjestys määräytyy korttien arvon perusteella. Mikäli kellään ei ole mitään edellä sanotuista yhdistelmistä, ratkaistaan käsien arvojärjestys korkeimman kortin eli *hain* perusteella.

Pokeri on kiinnostava peli muun muassa siksi, että siinä on psykologisilla tekijöillä suuri merkitys. On eduksi, jos osaa taitavasti hämätä eli *bluffata* saadakseen vastapelaajat uskomaan käden toisenlaiseksi kuin se on. Yhtä tärkeää on osata arvata, milloin toinen pelaaja yrittää bluffata. Tietysti on olennaista tietää oman korttiyhdistelmän arvo, joka määräytyy suoraan sen esiintymistodennäköisyydestä pelissä. Seuraavassa keskitytäänkin näihin todennäköisyyksiin, jotka lasketaan olettaen, että peliin käytettävässä korttipakassa on 52 korttia eli siinä ei ole mukana jokeria.

Esimerkki 1
Pelaajalle jaetaan pokerissa viisi korttia. Kuinka suuri todennäköisyys pelaajalla on saada **a)** värisuora, **b)** täyskäsi, **c)** kolmoset, **d)** pari?

Ratkaisu:
a) Kussakin neljässä maassa on numerot 1–14, sillä ässä voi olla numero 1 tai numero 14. Samasta maasta värisuora voidaan alla olevan luettelon mukaan saada 10 tavalla:

<u>1 2 3 4 5</u>, <u>2 3 4 5 6</u>, <u>3 4 5 6 7</u>, <u>4 5 6 7 8</u>, <u>5 6 7 8 9</u>,
<u>6 7 8 9 10</u>, <u>7 8 9 10 11</u>, <u>8 9 10 11 12</u>, <u>9 10 11 12 13</u> ja <u>10 11 12 13 14</u>

Viimeinen eli kuningasvärisuora suljetaan pois, jolloin suoria on 9. Maita on 4, joten värisuoria on $4 \cdot 9 = 36$ ja

$$P(\text{värisuora}) = \frac{36}{\binom{52}{5}} = \frac{36}{\frac{52!}{5!\cdot 47!}} = \frac{36}{2\,598\,960} \approx 0{,}000014\,.$$

b) Neljästä samanarvoisesta kortista voi valita kolme korttia $\binom{4}{3}$ eri tavalla. Koska korttiarvoja on 13, erilaisia kolmosia on $13 \cdot \binom{4}{3}$. Pari valitaan 12 eri korttiarvosta, ja niitä on $12 \cdot \binom{4}{2}$ erilaista. Täyskäden todennäköisyys on näin ollen

$$P(\text{täyskäsi}) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3\,744}{2\,598\,960} \approx 0{,}0014\,.$$

c) Erilaisia kolmosia on $13 \cdot \binom{4}{3}$. Kolmosten lisäksi käteen tulee kaksi erinumeroista korttia 12 numerosta. Näitä numerokaksikoita on $\binom{12}{2}$. Jokaisessa niissä kumpikin kortti voi olla neljää eri maata, joten sopivia kahden kortin yhdistelmiä on $4^2 \cdot \binom{12}{2}$. Huomaa, että tällöin ei tule mukaan pareja eli samaa arvoa olevia kahden kortin yhdistelmiä. Kolmosten todennäköisyys on siis $P(\text{kolmoset}) = \dfrac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot 4^2\cdot\binom{12}{2}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}0211$.

d) Kaksi samannumeroista korttia voidaan valita $\binom{4}{2}$ eri tavalla ja numerot puolestaan 13 eri tavalla. Pareja on siis kaikkiaan $13\cdot\binom{4}{2}$. Parin lisäksi käteen tulee kolme erinumeroista korttia 12 numerosta. Näitä numerokolmikoita on $\binom{12}{3}$. Jokaisessa kolmikossa yksi numero voi olla neljää eri maata, samoin toinen ja kolmas, joten erilaisia kolmikoita on $4^3\cdot\binom{12}{3}$. Parin todennäköisyydeksi saadaan

$$P(\text{pari}) = \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 4^3\cdot\binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}4226.$$

Vastaus: **a)** $\dfrac{36}{2\,598\,960} \approx 0{,}000014$ **b)** $\dfrac{3\,744}{2\,598\,960} \approx 0{,}0014$

c) $\dfrac{54\,912}{2\,598\,960} \approx 0{,}0211$ **d)** $\dfrac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0{,}4226$

Tehtäviä

15. Pelaajalle jaetaan pokerissa viisi korttia. Kuinka suuri todennäköisyys pelaajalla on saada **a)** kuningasvärisuora, **b)** neloset, **c)** väri, **d)** suora, **e)** kaksi paria?

16. Pelaajalle jaetaan pokerissa viisi korttia. Kuinka suuri on todennäköisyys sille, että pelaaja ei saa mitään pokerin nimetyistä korttiyhdistelmistä vaan pelkästään hain? (Vihje: Voit käyttää hyväksi pokerissa nimettyjen korttiyhdistelmien lukumääriä esimerkistä 1 ja tehtävästä 15.)

Vastauksia

1. **a)** 120 € **b)** 439 €

2. **a)** 6 oikein -rivejä 3, 5 oikein -rivejä 18, 4 oikein -rivejä 15
b) 6 + 1 oikein -rivejä 2, 6 oikein -rivejä 2, 5 oikein -rivejä 36, 4 oikein -rivejä 60
c) 5 oikein -rivejä 15, 4 oikein -rivejä 100

3. 95,5 %

4. 369,60 €

5. **a)** 4 oikein -rivejä 15 ja 3 oikein -rivejä 80
b) 6 oikein -rivejä 1, 5 + 1 oikein -rivejä 12, 5 oikein -rivejä 12, 4 + 2 oikein -rivejä 15, 4 + 1 oikein -rivejä 60, 4 oikein -rivejä 15, 3 + 2 oikein -rivejä 40, 3 + 1 oikein -rivejä 40 sekä 2 + 2 oikein -rivejä 15

6. **a)** 1,58 % **b)** 8,28 % **c)** 2,59 %

7. 0,50 %

8. 72 €

9. **a)** 0,00063 % **b)** 0,017 % **c)** 12,4 %

10. **a)** 30 **b)** 200 €

11. $\frac{1}{32} = 3{,}125\ \%$

12. **a)** $\frac{121}{576} \approx 21{,}0\ \%$ **b)** 27 %

13. **a)** $\frac{28}{37} \approx 75{,}68\ \%$ **b)** 14

14. **a)** $\frac{10}{37} \approx 27{,}0\ \%$ **b)** 18

15. **a)** $\frac{4}{2\,598\,960} \approx 0{,}0000015$ **b)** $\frac{624}{2\,598\,960} \approx 0{,}00024$ **c)** $\frac{5\,108}{2\,598\,960} \approx 0{,}0020$
d) $\frac{10\,200}{2\,598\,960} \approx 0{,}0039$ **e)** $\frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0{,}0475$

16. $\frac{1\,302\,540}{2\,598\,960} \approx 0{,}5012$